

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Matej Vilić

Hladni atomi u višemodnom optičkom  
rezonatoru

Diplomski rad

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Matej Vilić**

Diplomski rad

**Hladni atomi u višemodnom  
optičkom rezonatoru**

Voditelj diplomskog rada: dr. sc., Ticijana Ban

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2019.

*Velike zahvale bih ovim putem htio izraziti mentorici dr. sc. Ticijani Ban na vodstvu i savjetima pruženim prilikom izrade ovog diplomskog rada. Iznimno se zahvaljujem i na strpljenju, razumijevanju te ponajviše energiji i trudu uloženom kako bi izrada diplomskog bila izuzetno poučno i zabavno iskustvo.*

*Zahvale pružam i doc. dr. sc. Damiru Aumileru što je pomogao mojem znanstvenom usavršavanju ističući stvari koje me nisu naučili na fakultetu, i na tome što me je pozitivnim stavom privukao na rad u Laboratoriju za hladne atome.*

*Mateu Kruljcu se zahvaljujem za svu pomoć i strpljenje koje je imao objašnjavajući mi osnove rada sa rezonatorom, opremom laboratorija i programom za simulacije, te za sva osobna iskustva i prenijeto znanje koje će mi koristiti i dalje.*

*Hvala Danijelu Buhinu i Domagoju Kovačiću na svojoj tehničkoj i moralnoj podršci prilikom pisanja ovog rada.*

*Te konačno najveću zahvalnost pružam roditeljima za podršku i pomoć pri studiranju bez čije ljubavi i savjeta zasigurno ne bih bio jednako uspješan.*

## Sažetak

Konvencionalne metode hlađenja atoma u slobodnom prostoru se oslanjaju na optičko pobuđivanje atoma i naknadnu spontanu emisiju fotona gdje se disipacija ostvaruje pobuđivanjem atoma crveno ugođenom svjetlošću (manje frekvencije i energije) od atomskog prijelaza, a spontanom emisijom se emitira više energije. Takvim Dopplerovim hlađenjem atome možemo spustiti samo do energije koja odgovara vremenu života pobuđenog stanja. U ovom radu ćemo proučiti alternativnu metodu hlađenja koja koristi rezonator u kojem se atomi ne hlade spontanom emisijom, već interakcijom sa elektromagnetskim valovima unutar rezonatora. Ova vrsta hlađenja uzrokuje pojavu novih kvantnih mehanizama i omogućava hlađenje puno šire klase čestica jer ne zahtijeva jednostavnu elektronsku strukturu povoljnu za hlađenje laserom. Proći ćemo kroz fiziku optičkog rezonatora, njegovu izradu, karakterizaciju i buduću primjenu u području hladnih atoma.

Ključne riječi: Doppler hlađenje, optički rezonator, frekventni češalj, femtosekundni laser, magneto-optička stupica, atom rubidija, sub-Dopplerova temperatura, spektralna širina, sila zračenja, dipolna sila, Siziſovo hlađenje, dressed stanja



# Cold atoms in multi-mode optical resonator

## Abstract

Conventional laser cooling methods rely on atom excitation by red detuned light (of lower frequency and energy than the atomic electron transition) and subsequent higher energy spontaneous emission. This so-called Doppler cooling can only cool down atoms down to the temperatures defined by the transition lifetime. In this thesis an alternative method of cooling will be examined, one not using energy dissipation by spontaneous emission, but rather atom and electromagnetic wave interaction inside a resonator. This interaction brings about new quantum effects and allows cooling of a much broader class of particles, not requiring an electron structure conducive to laser cooling. The physics behind optical resonators will be explained, as well as their manufacture, characterization and future application in the field of cold atom physics.

Keywords: Doppler cooling, optical resonator, frequency comb, femtosecond laser, magneto-optical trap, rubidium atoms, sub-Doppler temperature, spectral width, radiation force, Sisyphus cooling, dipole force, dressed states

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Geometrija svjetlosne zrake</b>	<b>3</b>
2.1	Paraksijalnost . . . . .	3
2.2	Gaussova zraka . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Fabry-Perot rezonator</b>	<b>5</b>
3.1	Stabilnost rezonatora . . . . .	5
3.2	Planarni rezonator . . . . .	6
3.3	Gubici u optičkom rezonatoru . . . . .	7
3.4	Konfokalni rezonator . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Hlađenje atoma</b>	<b>13</b>
4.1	Hlađenje atoma u slobodnom prostoru . . . . .	13
4.2	Hlađenje i zarobljavanje atoma unutar optičkog rezonatora . . . . .	17
4.2.1	Izvod master jednadžbe . . . . .	17
4.2.2	Sila na atom u optičkom rezonatoru . . . . .	19
4.2.3	Hlađenje atoma u rezonatoru velike finesse . . . . .	22
4.2.4	Dressed stanja . . . . .	24
4.3	Hlađenje atoma upotrebom višemodne svjetlosti . . . . .	26
4.4	Simulacije dinamike atoma u višemodnom rezonatoru . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Eksperiment</b>	<b>35</b>
5.1	Izrada konfokalnog rezonatora . . . . .	37
5.2	Karakterizacija konfokalnog rezonatora . . . . .	38
5.2.1	Eksperimentalni postav za karakterizaciju . . . . .	38
5.2.2	Mjerenje transversalnih modova rezonatora . . . . .	40
5.2.3	Mjerenje longitudinalnih modova rezonatora . . . . .	42
5.3	Stabilizacija optičkog rezonatora . . . . .	45
5.3.1	PDH tehnika stabilizacije . . . . .	46
5.3.2	Eksperimentalni postav za dobivanje PDH signala . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>51</b>



# 1 Uvod

Laseri su kroz pola stoljeća uporabe omogućili mnogo znanstvenih postignuća u metrologiji, spektroskopiji, medicini, astrofizici i brojnim drugim područjima, uključujući nekoliko Nobelovih nagrada, poput nagrade za lasersko hlađenje [1], Bose Einsteinov kondenzat [2], upotrebu laserskog frekventnog češlja u spektroskopiji [3, 4] i optičke pincete [5]. Upravo zbog toga je kroz zadnjih desetak godina došlo je do velikog rasta interesa i broja istraživačkih grupa koje se bave područjem hladnih atoma. Nova otkrića se događaju teorijskim razmatranjima, eksperimentalnim istraživanjima i računalnim simulacijama. Hlađenje i manipulacija atoma upotrebom laserske svjetlosti temelji se na interakciji električnog polja lasera i energijskih razina u atomu. U slučaju hlađenja, kao posljedicu te interakcije atomi osjećaju disipativnu silu koja uzrokuje smanjenje brzine atoma, odnosno kinetičke energije atoma. Ova sila je odgovorna za najučestaliji oblik hlađenja koji se naziva Dopplerovo hlađenje i realizira se upotrebom magneto-optičke stupice. S druge strane postoji dipolna sila koja se javlja u konfiguracijama dvije suprotno-propagirajuće zrake iste frekvencije i polarizacije koje čine stojni val. Ta sila je konzervativna, te uzrokuje nakupljanje atoma u minimume optičkog potencijala.

Interakcija atoma i svjetlosti se bitno mijenja ukoliko atome smjestimo unutar optičkog rezonatora visoke kvalitete koji biva rezonantno pobuđen laserom jedne ili nekoliko frekvencija. Zbog višestrukih putovanja fotona kroz rezonator efekt dipolne sile je bitno povećan te, još zanimljivije, dolazi do vezanja atoma i električnog polja unutar rezonatora, pa položaj atoma u rezonatoru utječe na frekvencije rezonatorskih modova, a modovi pak povratno utječu na položaj atoma preko dipolne sile. Ponašanje sustava postaje nelinearno i teorijski modeli za silu temeljeni na klasičnom prikazu električnog polja se zamjenjuju modelima koji uključuju kvantizacijom električnog polja. Za određene uvjete frekvencijskih odnosa pobudnog lasera od modova rezonatora i atomskog prijelaza, te mali intenzitet svjetla, opaža novi mehanizam hlađenja. Takvo hlađenje optičkim rezonatorom nije ovisno o energijskoj strukturi atoma, te se može primjeniti i za hlađenje kompleksnih atoma, molekula, biomolekula, nanočestica i sličnih struktura. Dodatno, minimalna temperatura određena je kvalitetom rezonatora, pa se za rezonatore visoke kvalitete mogu postići temperature vrlo bliske apsolutnoj nuli.

Cilj ovog diplomskog rada bio je proučiti hlađenje atoma pomoću optičkog rezonatora, te izračunati dinamiku atoma u konfokalnom rezonatoru pobuđenog sa nekoliko frekvencija pobudnog lasera. U eksperimentalnom dijelu rada cilj je bio izraditi konfokalni rezonator, te ga karakterizirati i stabilizirati kako bi bio spreman za eksperiment koji se planira napraviti u skoroj budućnosti.

Diplomski rad je u potpunosti napravljen na Institutu za fiziku, u laboratoriju za hladne atome, pod mentorstvom dr.sc. Ticijane Ban i uz suradnju cijelog tima za hladne atome.

## 2 Geometrija svjetlosne zrake

### 2.1 Paraksijalnost

Kako je geometrijska optika uvelike pojednostavljena uvođenjem približno paralelnih zraka tako ćemo se istom aproksimacijom poslužiti i u valnoj optici. Paraksijalne zovemo valove koji se propagiraju približno u smjeru optičke osi. Za električno polje koje se propagira u pozitivnom smjeru  $z$ -osi dobivamo zapis

$$E^+(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})e^{ikz}. \quad (2.1)$$

$\psi(\mathbf{r})$  je envelope, a  $e^{ikz}$  je val nosilac. Za paraksijalan val envelope  $\psi$  se mora sporo mijenjati na skali  $\lambda$ , valnoj duljini vala kojeg promatramo.

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \ll \frac{\psi}{\lambda} \approx k\psi. \quad (2.2)$$

Uvrštavajući u Helmholtzovu jednadžbu  $((\nabla^2 + k^2)E^+ = 0)$  možemo dobiti sljedeću jednadžbu za propagaciju vala,

$$\left( \nabla_T^2 + 2ikz \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0. \quad (2.3)$$

Gdje je  $\nabla_T$ , transverzalni Laplasijan

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.4)$$

Zanemarujući član  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$  uslijed uvjeta spore promjene envelope dobivamo paraksijalnu valnu jednadžbu:

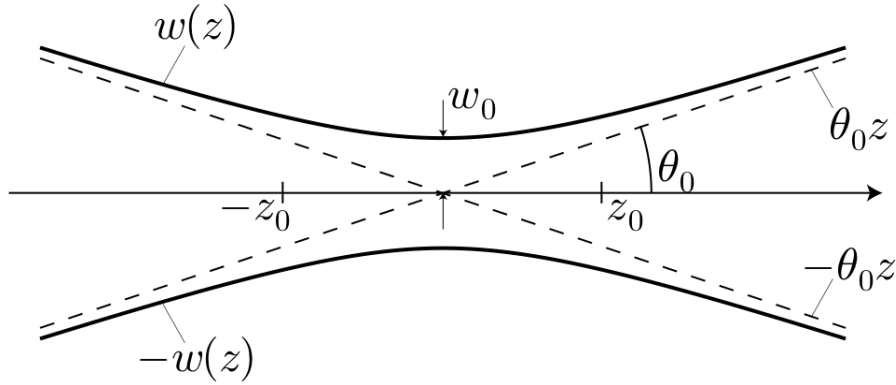
$$\left( \nabla_T^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi = 0. \quad (2.5)$$

### 2.2 Gaussova zraka

Ovisno o simetriji sustava valna jednadžba je zadovoljena samo za određene transverzalne modove svjetlosti. Jedan od najčešće upotrebljivanih rješenja jednadžbe (2.5) je Gaussova zraka čije je električno polje prikazano jednadžbom (2.6). Veliki broj lasera emitira upravo Gaussovu zraku, a i konfokalni rezonator kojeg ćemo pro-

matrati kasnije podržava upravo Gaussove zrake.

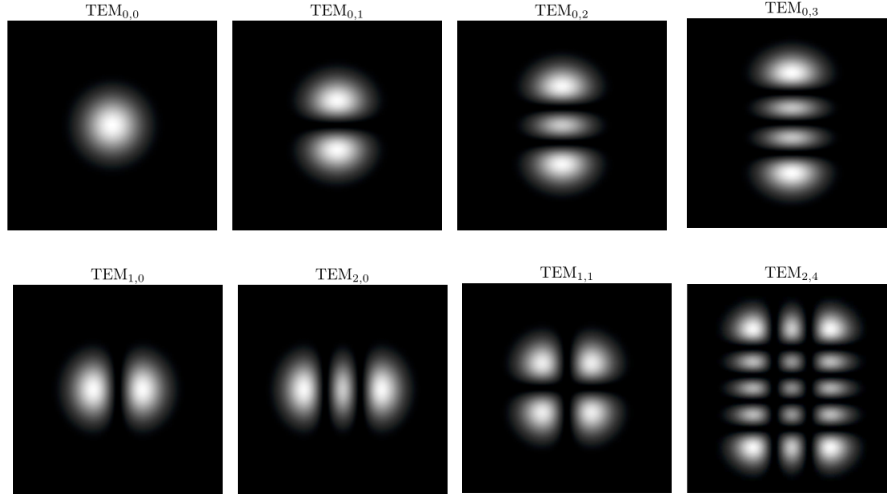
$$E^+(\mathbf{r}) = E_0^+ \exp\left(-\frac{w_0^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(ikz - i \tan^{-1} \frac{z}{z_0}\right) \exp\left(ik \frac{r^2}{2R(z)}\right). \quad (2.6)$$



Slika 2.1: Prikaz envelope Gaussove zrake oko najužeg dijela gdje se fokusira u struk  $w_0$ . Preuzeto iz [19].

Viši modovi koji se također pojavljuju u eksperimentu se nazivaju Hermit-Gaussove zrake ( $\text{TEM}_{lm}$ ), čije se električno polje može prikazati relacijom (2.7). Primjere nekoliko takvih modova možemo vidjeti na Slici 2.2.

$$E_{l,m}^+(\vec{r}) = E_{Gauss}^+(\vec{r}) \sqrt{\frac{1}{2^{l+m} l! m!}} H_l \left[ \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right] H_m \left[ \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right] \exp \left[ i - (l+m) \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right) \right] \quad (2.7)$$



Slika 2.2: Distribucija intenziteta Hermit-Gaussovih zraka. Općenito,  $TEM_{lm}$  mod ima  $l$  tamnih pruga u  $x$ -smjeru i  $m$  tamnih pruga u  $y$ -smjeru. Preuzeto iz [19].

### 3 Fabry-Perot rezonator

Fabry-Perot optički rezonator je uređaj kojeg su razvili Charles Fabry i Alfred Perot 1899. Sastoji se od dva paralelna zrcala pomoću kojih sustav postiže veliki intenzitet transmisije i mali intenzitet refleksije za uski raspon frekvencija oko frekvencije rezonancije, te mali intenzitet transmisije i veliku refleksiju inače. Zbog vrlo uskih rezonancija i velikih intenziteta vrlo je koristan alat u području telekomunikacija, lasera i spektroskopije.

#### 3.1 Stabilnost rezonatora

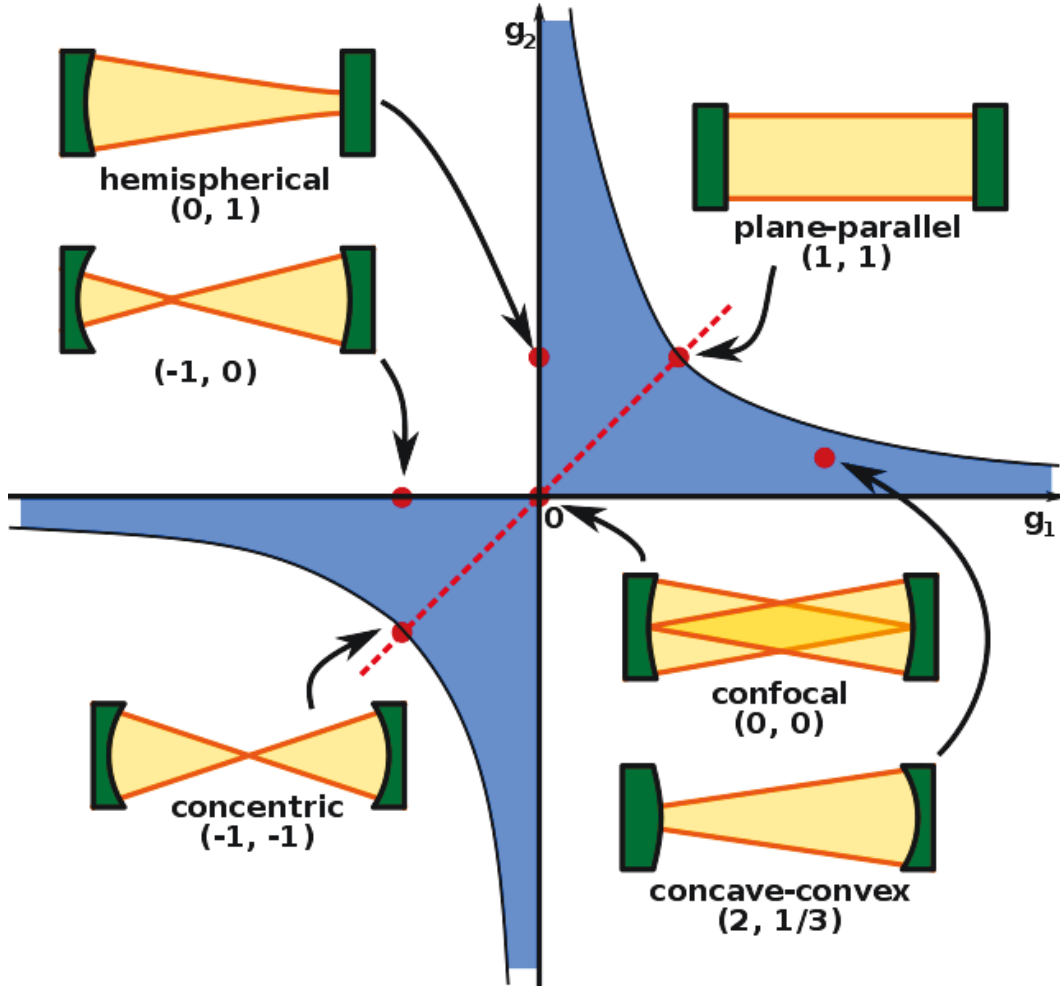
Stabilnost se odnosi na činjenicu da nakon mnogo refleksija transmitirana zraka ostaje blizu optičke osi dolazne zrake. Nestabilna konfiguracija rezonatora dovest će do proširenja zrake unutar rezonatora dok ne preraste veličinu zrcala i onda bude izgubljena. Za ravna zrcala velike refleksije se teško postiže stabilnost zbog velikog broja refleksija, odstupanja kolimacije zrake i paralelnosti zrcala moraju biti manja od par kutnih sekundi inače se zraka prebrzo gubi iz rezonatora. Zato se često koriste rezonatori sa zakrivljenim zrcalima koji toleriraju veća odstupanja, te s kojima je lakše postići stabilnost zrake unutar rezonatora. Ako definiramo parametar stabilnosti  $g_{1,2}$  koji je definiran preko zakrivljenosti zrcala  $R_{1,2}$  preko relacije (3.1), stabilni rezonator se postiže kada je zadovoljena relacija (3.2):



$$g_{1,2} = 1 - \frac{L}{R_{1,2}}, \quad (3.1)$$

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1. \quad (3.2)$$

Različite stabilne konfiguracije i područja stabilnosti u ovisnosti o  $g_{1,2}$  možemo vidjeti na Slici 3.1.



Slika 3.1: Dijagram stabilnosti optičkih rezonator. Plavo zasjenjena područja su stabilne konfiguracije. Preuzeto iz [18].

### 3.2 Planarni rezonator

Počnimo razmatranje sa najjednostavnijim slučajem od dva ravna zrcala na udaljenosti  $d$  koja savršeno reflektiraju upadnu svjetlost. U tom slučaju da bi val mogao postojati u rezonatoru između dva zrcala samo ako mu je promjena faze tijekom jednog ciklusa (ciklus je dvostruki prolaz kroz rezonator, od zrcala 1, refleksija na

zrcalu 2 i povratak do zrcala 1) iznosi neki višekratnik od  $2\pi$ . Iz čega lako nalazimo dopuštene valne brojeve  $k_q$ , valne duljine  $\lambda_q$  i frekvencije  $\omega_q$ :

$$2kd = 2\pi q \quad (q \in \mathbb{N}_0), \quad (3.3)$$

$$k_q = \frac{\pi q}{d}; \quad \omega_q = \frac{\pi c q}{d}; \quad \lambda_q = \frac{2d}{q}. \quad (3.4)$$

Spektar se sastoji od niza jednako udaljenih spektralnih linija koje nazivamo rezonatorski modovi. Razlika frekvencije između dva moda naziva se eng. free spectral range, a označava se kraticom  $f_{FSR}$ .

$$f_{FSR} := \frac{\omega_{q+1} - \omega_q}{2\pi} = \frac{c}{2d}. \quad (3.5)$$

### 3.3 Gubici u optičkom rezonatoru

U realnom slučaju zbog nesavršene refleksije, zrcala uzrokuju smanjenje amplitude svjetlosti (odnosno gubitke) pri svakom ciklusu što dovodi do gušenja amplitude svjetlosti unutar rezonatora. Kao i u slučaju gušenog oscilatora, gubici uzrokuju širenje rezonatorskih modova. Promatranjem odbijanja jednog vala unutar rezonatora možemo pronaći ovisnosti intenziteta u rezonatoru o frekvenciji, odnosno valnoj duljini dolazne svjetlosti. Neka zrcala imaju koeficijent refleksije  $r$  koji nam govori koji udio električnog polja vala ostaje unutar rezonatora.

$$E_{n+1} = r e^{i2kd} E_n \quad (3.6)$$

Naravno ukupno električno polje će biti suma svih reflektiranih električnih polja:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} E_n = \sum_{n=0}^{\infty} (r e^{i2kd})^n E_0 = \frac{E_0}{1 - r e^{i2kd}}. \quad (3.7)$$

Pretpostavljamo da je koeficijent  $r$  realan, u slučaju da nije njegova se kompleksna faza samo dodaje na efektivnu duljinu rezonatora  $d$ . Pošto znamo da je intenzitet proporcionalan kvadratu električnog polja možemo naći intenzitet  $I$  unutar rezonatora

izražen pomoću intenziteta ulazne zrake  $I_0$ ,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{I_0}{|1 - re^{i2kd}|^2} \\
&= \frac{I_0}{|1 - r \cos(2kd) - i \sin(2kd)|^2} \\
&= \frac{I_0}{|1 - r \cos(2kd)|^2 + r^2 \sin^2(2kd)} \\
&= \frac{I_0}{1 - 2r \cos(2kd) + r^2 \cos^2(2kd) + r^2 \sin^2(2kd)} \\
&= \frac{I_0}{1 + r^2 - 2r \cos(2kd)} \\
&= \frac{I_0}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2(kd)} \\
&= \frac{\frac{I_0}{1-r^2}}{1 + \frac{4r}{1-r^2} \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{f_{FSR}}\right)} \\
&= \frac{I_{max}}{1 + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{f_{FSR}}\right)}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

U zadnjem smo koraku intenzitet izrazili pomoću frekvencije svjetlosti  $\nu$ , maksimalnog intenziteta

$$I_{max} := \frac{I_0}{1 - r^2}, \tag{3.9}$$

i finese

$$\mathcal{F} := \frac{\pi\sqrt{r}}{1 - r}, \tag{3.10}$$

čija definicija će ubrzo imati više smisla kada izračunamo još nekoliko karakteristika Fabry-Perot rezonatora.

Kako bismo karakterizirali širinu spektralnih linija pogledati ćemo za koje je frekvencije intenzitet jednak  $I_{max}/2$ , takozvani FWHM (eng. width at half maximum). U našem slučaju taj uvjet se svodi na

$$\left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{f_{FSR}}\right) = 1 \tag{3.11}$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi\nu}{f_{FSR}}\right) = \left(\frac{\pi}{2\mathcal{F}}\right)^2, \tag{3.12}$$

što je zadovoljeno za frekvencije

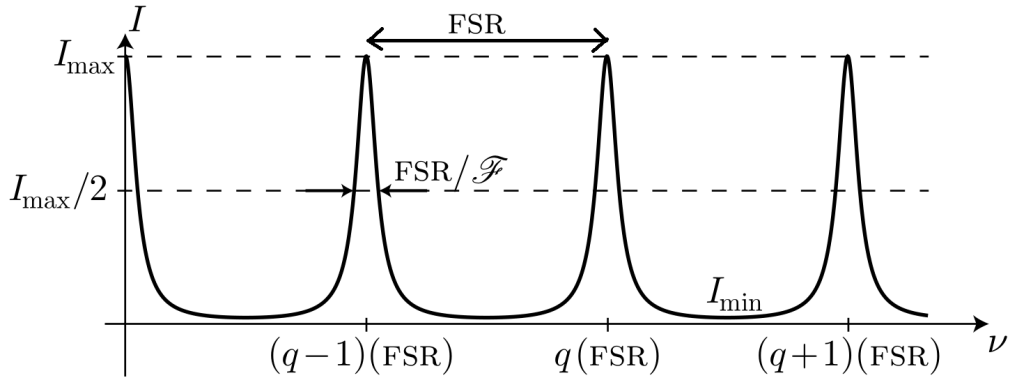
$$\nu = \pm \frac{f_{FSR}}{\pi} \arcsin\left(\frac{\pi}{2\mathcal{F}}\right). \tag{3.13}$$

Ono što će nama biti od velikog interesa su upravo rezonatori vrlo velike finese pa ćemo promatrati dani izraz u aproksimaciji malih kuteva,

$$\begin{aligned}\nu &\approx \pm \frac{f_{FSR}}{\pi} \left( \frac{\pi}{2\mathcal{F}} \right) \\ &= \pm \frac{f_{FSR}}{2\mathcal{F}}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

$$\delta\nu_{FWHM} = \frac{f_{FSR}}{\mathcal{F}},\tag{3.15}$$

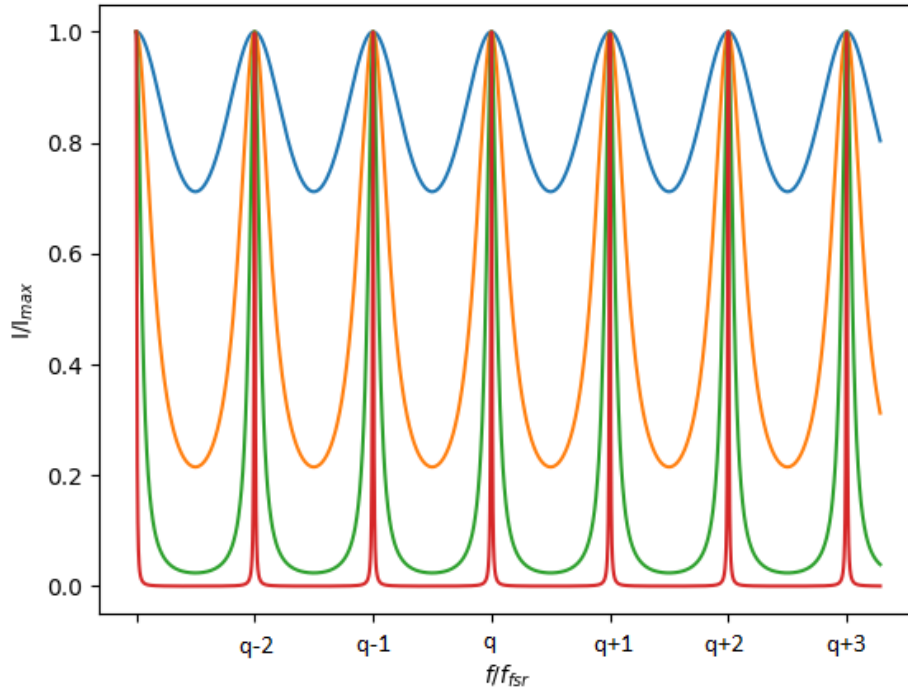
što je rezultat koji direktno povezuje frekventnu udaljenost vrhova, reflektivnost zrcala (preko finese) i širinu rezonancija, Slika 3.2. Također vidimo kako su samo dva parametra, finesa i  $f_{FSR}$ , dovoljna da karakteriziramo optički rezonator. Za visoku finesu rezonancije se sužavaju a maksimalni intenzitet raste te spektar izgleda sve sličnije Diracovim delta funkcijama koji smo razmatrali u uvodu za slučaj sa valom zarobljenim između dva savršena zrcala. Navedeno se vidi na Slici 3.3 koja prikazuje izračunate spektre rezonatorskih modova za različite finese.



Slika 3.2: Ovisnost intenziteta unutar rezonatora o frekvenciji. Vidimo označen FSR i širinu  $\delta\nu_{FWHM} = f_{FSR}/\mathcal{F}$ . Preuzeto iz [19].

Koliko dugo će foton biti u rezonatoru ovisi o raznim gubicima prisutnim u sustavu. Osnovni gubitak fotona iz rezonatora je transmisija kroz zrcala. Ako su koeficijenti refleksije  $R_1$  i  $R_2$  vjerojatnost za opstanak fotona prilikom jednog ciklusa bi bila  $P = R_1 R_2$ .

No uzimajući u obzir druge gubitke poput apsorpcije na zrcalima, raspršenja zbog nesavršenosti površine te konačne veličine zrcala finesu se može definirati preko vjerojatnosti opstanka fotona u rezonatoru nakon jednog ciklusa  $P$ , koja uključuje sve



Slika 3.3: Intenzitet u rezonatoru normaliziran na maksimalnu vrijednost za finesu 1 (plavo), 3 (narančasto), 10 (zeleno) i 100 (crveno).

te efekte na sljedeći način:

$$\mathcal{F} = \frac{\pi P^{\frac{1}{4}}}{1 - \sqrt{P}}, \quad (3.16)$$

Pošto je vjerojatnost da se foton izgubi nakon jednog ciklusa u rezonatoru  $(1 - P)$ , vjerojatnost da je izgubljen nakon točno  $n$  ciklusa iznosi

$$P(n) = P^{n-1}(1 - P), \quad (3.17)$$

iz čega možemo izračunati prosječni broj ciklusa koji će foton preživjeti

$$\begin{aligned}
\langle n \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n) \\
&= (1 - P) \sum_{n=0}^{\infty} nP^{n-1} \\
&= (1 - P) \frac{\partial}{\partial P} \sum_{n=0}^{\infty} P^n \\
&= (1 - P) \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{1}{1 - P} \right) \\
&= (1 - P) \frac{1}{(1 - P)^2} \\
&= \frac{1}{1 - P}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Duljina rezonatora i brzina fotona su konstantne i poznate tako da rezultat možemo izraziti u jedinicima vremena umjesto broja ciklusa koristeći vrijeme jednog ciklusa:

$$\tau_c = \frac{2d}{c} = \frac{1}{f_{FSR}} \tag{3.19}$$

što nam daje prosječno vrijeme života za foton od

$$\tau = \langle n \rangle * \tau_c = \frac{1}{f_{FSR}(1 - P)}. \tag{3.20}$$

Konačno ako imamo "dobar" rezonator, rezonator visoke finesse i vrlo uskih spektralnih linija za koji je  $P \approx 1$  možemo napraviti sljedeće zamjene:

$$P^{\frac{1}{4}} \approx 1, \tag{3.21}$$

$$(1 - P) \approx 2(1 - \sqrt{P}), \tag{3.22}$$

$$\mathcal{F} \approx \frac{\pi}{1 - \sqrt{P}}, \tag{3.23}$$

koje nam omogućuju da vrijeme života fotona izrazimo pomoću  $f_{FSR}$ :

$$\tau = \frac{1}{f_{FSR}(1 - P)} = \frac{1}{2f_{FSR}(1 - \sqrt{P})} = \frac{\mathcal{F}}{2\pi f_{FSR}} \tag{3.24}$$

Iz čega slijedi relacija neodređenosti za rezonator:

$$\tau \delta \nu_{FWHM} = \frac{1}{2\pi} \quad (3.25)$$

Faktor dobrote  $Q$  je pokazatelj "kvalitete" oscilatora. I ako fotoni žive prosječno vrijeme  $\tau$  prije gubitka iz rezonatora onda je stopa gubitka energije upravo  $1/\tau$  te za faktor dobrote možemo pisati:

$$Q = 2\pi\nu_q\tau \quad (3.26)$$

te iskoristiti relaciju neodređenosti kako bismo dobili,

$$Q = \frac{q f_{FSR}}{\delta \nu_{FWHM}} = q \mathcal{F}. \quad (3.27)$$

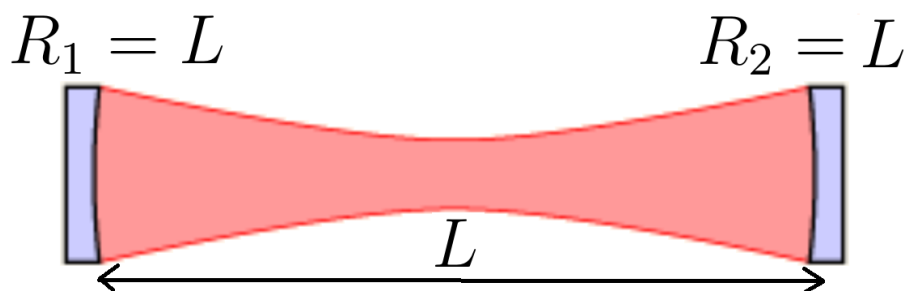
$q$  je općenito vrlo velik broj ( $10^6$ ) jer je duljina rezonatora mnogo veća od valne duljine svjetlosti. Finesa je također velik broj ( $10^2 - 10^5$ ), tako da je faktor dobrote vrlo velik te se finesa često koristi umjesto faktora dobrote kao standardna veličina za opisivanje "kvalitete" rezonatora.

### 3.4 Konfokalni rezonator

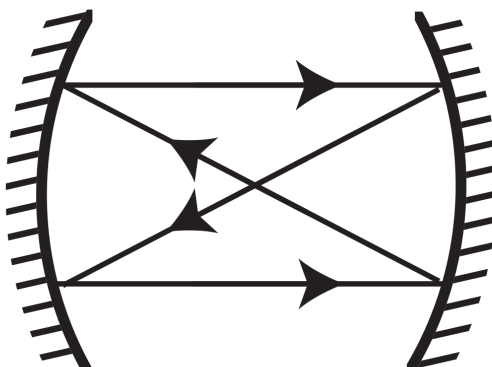
Jedna specifična konfiguracija stabilnog rezonatora sa zakrivljenim zrcalima je konfokalni rezonator. U toj konfiguraciji zrcala imaju jednake radijuse zakrivljenosti te udaljenost među njima je jednaka radijusu zakrivljenosti ( $g_1 = g_2 = 0$ ), Slika 3.4. Takva konfiguracija podržava sve Hermit-Gaussove zrake. Zakrivljenost zrcala modificira frekvencije pojedinih modova u 2 skupa degeneriranih frekvencija [19]:

$$f_{lmq} = f_{FSR} \left[ q + \frac{1+l+m}{\pi} \arccos \sqrt{g_1 g_2} \right] = f_{FSR} \left[ q + \frac{1+l+m}{2} \right] \quad (3.28)$$

Ako zraka nije centralna onda mora proći kroz 2 ciklusa u rezonatoru prije nego dođe u početni položaj, Slika 3.5. Efektivna duljina rezonatora za necentralne zrake je dvostruko veća što modificira rezonantne frekvencije (dvostruko manji FSR). Taj efekt ćemo iskoristiti u eksperimentu za eliminaciju necentralnih modova kako bismo postigli  $TEM_{00}$  mod koji pretpostavljamo u teorijskim razmatranjima i simulacijama.



Slika 3.4: Oblik zrake u konfokalnom rezonatoru. Preuzeto iz [18].



Slika 3.5: Necentralna zraka u konfokalnom rezonatoru treba 2 ciklusa da se vrati u početni položaj. Preuzeto iz [19].

## 4 Hlađenje atoma

Lasersko hlađenje su prvi put opisali Hänsch i Schawlow 1975. godine opisujući metodu hlađenja pomoću tlaka zračenja raspršenjem fotona na oblaku atoma, teorija koju je kasnije Ashkin proširio opisom istovremenog zarobljavanja i hlađenja atoma uz pomoć radijativnih i dipolnih sila uzrokovanih djelovanjem lasera na atom. Dvije istraživačke skupine su već 1978. demonstrirale hlađenje atoma do oko 40 K [18]. Do kraja 20. stoljeća tehnološki i teorijski napretci su omogućili hlađenje atoma do temperatura vrlo bliskih apsolutnoj nuli ( $40 \mu\text{K}$  [25]), što je omogućilo razvoj preciznih atomskih satova, spektroskopije i otkriće novog stanja materije, tzv. Bose-Einsteinovog kondenzata, za što su 1997. godine Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji i William D. Phillips dobili Nobelovu nagradu.

### 4.1 Hlađenje atoma u slobodnom prostoru

Kvalitativno razumijevanje ove sile možemo dobiti razmatranjem Hamiltonijana sustava atoma i elektromagnetskog zračenja. Neka atom mase  $m$  ima dva stanja, os-



novno  $|g\rangle$  i pobuđeno  $|e\rangle$ , sa razlikom energija između njih  $\hbar\omega_{10}$ , i atomski dipol  $\vec{d}$ . Ukupni Hamiltonijan  $H$  možemo zapisati u nekoliko dijelova:

$$H = H_A + H_V + V_{AL} + V_{AV} \quad (4.1)$$

gdje je

$$H_A = \frac{p^2}{2m} + \hbar\omega_{10} \quad (4.2)$$

atomski Hamiltonijan za redom, vanjske i unutrašnje stupnjeve slobode.

$$H_V = \sum_k \hbar\omega_k \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \quad (4.3)$$

je član koji opisuje vakuumsko slobodno polje.

$$V_{AL} = -\vec{d}\vec{E}_L(x) \quad (4.4)$$

i

$$V_{AV} = -\vec{d}\vec{E}_V(x) \quad (4.5)$$

su interakcijski članovi između atomskog dipola  $\vec{d}$  i redom, laserskog i vakuumskog električnog polja koje možemo zapisati kao:

$$\vec{E}_L(x, t) = \vec{\epsilon}A(x)\frac{1}{2}e^{-\omega_P t - i\phi(x)} \quad (4.6)$$

$$\vec{E}_V(x) = i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} \vec{\epsilon}a_k e^{ikx}, \quad (4.7)$$

gdje je  $V$  volumen kvantizacije elektromagnetskog polja,  $a$  i  $a^\dagger$  operatori dizanja i spuštanja,  $u(x)$  i  $\phi(x)$  prostorno ovisna amplituda i faza električnog polja,  $\vec{\epsilon}$  polarizacija električnog polja i  $\omega_P$  frekvencija električnog polja lasera. Još jedna korisna veličina je Rabijeva frekvencija koja iznosi:

$$\omega_R = \vec{\epsilon}\vec{d}A(x). \quad (4.8)$$

Uvođenjem aproksimacije rotirajućeg vala (RWA) i zapisom dipolnog momenta

izraženog relacijom (4.9), može se izvesti izraz za silu na atom (4.10).

$$\hat{d} = \vec{d}(\sigma^+ + \sigma^-) \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \dot{\vec{P}} \\ &= \frac{i}{\hbar} [H, \vec{P}] \\ &= \nabla(\vec{d}\vec{E}_L(x, t)) + \nabla(\vec{d}\vec{E}_V(x, t)). \\ &= -\frac{\hbar\nabla\omega_R(x)}{2}(\sigma^+e^{-i\phi(x)} + \sigma^-e^{+i\phi(x)}) \\ &\quad - i\nabla\phi(x)\frac{\hbar\omega_R(x)}{2}(\sigma^+e^{-i\phi(x)} + \sigma^-e^{+i\phi(x)}), \end{aligned} \quad (4.10)$$

Detaljan izvod sile se može pronaći u [6], ovdje je cilj bio razumijevanje porijekla sile. Vidimo kako sila ima dva člana, prvi proporcionalan gradijentu amplitude električnog polja (tj. gradijentom Rabijske frekvencije) i drugi proporcionalan gradijentu faze električnog polja. Prvi član je odgovoran za dipolnu silu koja je konzervativna i upotrebljava se za zarobljavanje atoma u minimumu ili maksimumu električnog polja. Drugi član je odgovoran za silu hlađenja koju još nazivamo radijativna sila ili sila tlaka zračenja. Ona je disipativne prirode, te uzrokuje smanjenje brzine atoma, odnosno hlađenje.

Srednju silu na atom s atomskim prijelazom širine  $\Gamma$ , koji obasjavamo svjetlošću pomaknutom od rezonantne frekvencije atomskog prijelaza za  $\Delta_a = \omega_P - \omega_{10}$  (dalje korišten eng. detuning) dobivamo usrednjavanjem po svim unutrašnjim stupnjevima slobode atoma koristeći matrice gustoće  $\rho$  [6]:

$$\begin{aligned} f(x) &= Tr[\rho F(x)] \\ &= -\hbar\nabla\omega_R(x)u_x - \hbar\omega_R\nabla\phi(x)v_y(t), \end{aligned} \quad (4.11)$$

gdje su  $u_x$  i  $v_y$  Blochovi vektori:

$$u_x = \frac{\Delta_a}{\omega_R} \frac{s}{1+s} \quad (4.12)$$

$$v_y = \frac{\Gamma}{\omega_R} \frac{s}{1+s} \quad (4.13)$$

$$s = \frac{\omega_R^2}{\Delta_a^2 + \Gamma^2} \quad (4.14)$$

U slučaju hlađenja ravnim valom valnog vektora  $\vec{k}$  vrijedi:

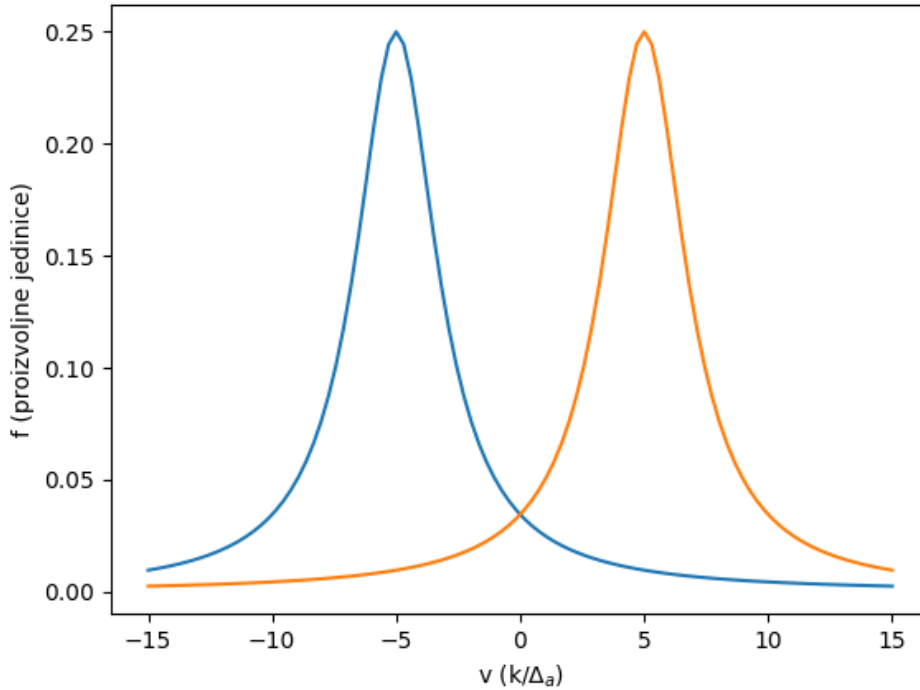
$$\nabla\omega_R(x) = 0 \quad (4.15)$$

$$\nabla\phi(x) = -|\vec{k}|, \quad (4.16)$$

pa izraz za silu zračenja iznosi

$$f(x) = \hbar k \Gamma \frac{\omega_R^2/2}{(\Delta_a - \vec{k}\vec{v})^2 + \Gamma^2 + \omega_R^2/2}. \quad (4.17)$$

Ako je frekvencija laserske zrake takva da atom pretežito apsorbira fotone koji se propagiraju suprotno od smjera njegovog gibanja (brzine atoma) onda će se usporavati, ako pretežito apsorbira fotone koji se propagiraju u smjeru njegovog gibanja onda će mu se impuls povećati apsorpcijom. U oba slučaja spontana emisija ima izotropnu raspodjelu u prostoru te u prosjeku ne doprinosi količini gibanja atoma. Možemo vidjeti da će se atomi hladiti upravo u slučaju kada je detuning negativan, Slika 4.1.

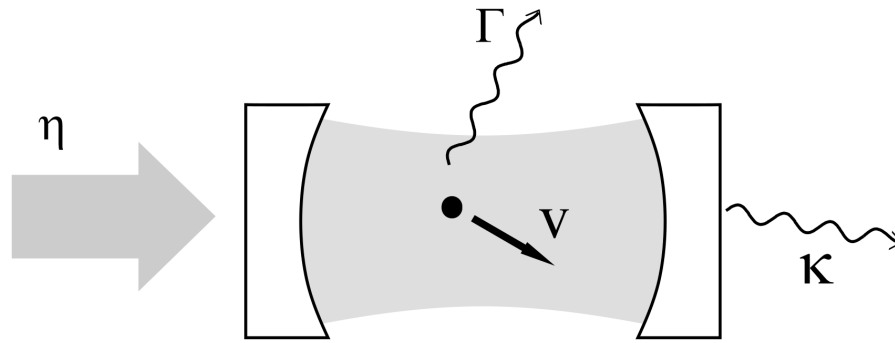


Slika 4.1: Vidimo iznos sile u slučaju kada je  $\Delta_a/k = -5$  (plavo), te kada je  $\Delta_a/k = 5$  (narančasto). Za slučaj  $\Delta_a < 0$  sila pretežito djeluje u smjeru suprotnom od smjera gibanja i time smanjuje kinetičku energiju i hladi atom.

Konačna temperatura se postiže kada se uspostavi ravnoteža između hlađenja i grijanja. Za grijanje je odgovorna difuzija atoma uzrokovana spontanom emisijom. Svaki foton koji je emitiran odnosi sa sobom impuls od  $\hbar k$ , odnosno atomu predaje jednak impuls u nasumičnom smjeru.

## 4.2 Hlađenje i zarobljavanje atoma unutar optičkog rezonatora

Dodatkom rezonatora mijenja se interakcija između atoma i elektromagnetskog zračenja. Foton se više puta reflektira od zrcala i prolazi kroz atomski oblak te se javlja veza-  
nje između fotona i atoma. Fotoni utječu na gibanje atoma, ali i atomi utječu na dinamiku fotona u rezonatoru. Na Slici 4.2 shematski je prikazan proučavani sus-  
tav: rezonator se puni laserom intenziteta  $\eta$ , u njemu se gibaju atomi brzinom  $\vec{v}$ , pobuđeni atomi se relaksiraju sa stopom spontane emisije  $\Gamma$  te se fotoni gube iz re-  
zonatora stopom raspada  $\kappa$ .



Slika 4.2: Čestica pobuđena laserom (sa stopom spontane emisije  $\Gamma$ ) se giba u rezonatoru koji gubi fotone stopom  $\kappa$  i pumpa se snagom  $\eta$ . Preuzeto iz [6]

### 4.2.1 Izvod master jednadžbe

Kada se rezonator pobuđuje jakim laserom frekvencije ugođene na rezonanciju u rezonatoru se nalazi veliki broj fotona. U tom slučaju rezonator se nalazi u jednom koherentnom stanju konstantnog intenziteta te je za opis sustava opravdano koristiti klasičnu reprezentaciju električnog polja, odnosno modova rezonatora. No u situacijama kada je broj fotona malen potrebno je uvesti kvantizaciju električnog polja, što dovodi do novih mehanizama hlađenja i zarobljavanja (samoorganizacije) atoma u rezonatoru. Da bismo modelirali takav sustav možemo započeti Hamiltonijanom (4.1) iz prošlog poglavlja uz dodatak sljedećih članova koji opisuju rezonator  $H_R$ ,

interakciju rezonatora i vakuumskog polja  $V_{RC}$ , interakciju atoma i rezonatora  $V_{AR}$ , te Hamiltonijan pumpnog lasera (fotonski hamiltonijan)  $H_P$ .

$$H_R = \hbar\omega_R a_R^\dagger a_R \quad (4.18)$$

$$V_{RV} = \int_{\Delta\omega} d\omega g(\omega)(a_R a_\omega^\dagger + a_\omega a_R^\dagger) \quad (4.19)$$

$$V_{AR} = \hbar g(a^+ \sigma^- + \sigma^+ a) \quad (4.20)$$

$$H_P = -i\hbar\eta(ae^{+i\omega_P t} - a^\dagger e^{+i\omega_P t}) \quad (4.21)$$

Iz ukupnog hamiltonijana, moguće je eliminirati vakuumsko polje, te prelaskom u sustav koji se rotira s  $\omega_P$  je moguće napisati master jedndžbu za sistem koji se sastoji od atoma sa dvije energijske razine smještenih unutar rezonatora koji je rezonantno pobuđen laserom i ima gubitke  $\Gamma$  i  $\kappa$ .

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -\frac{i}{\hbar}[H_{J.C.}, \rho] - \frac{i}{\hbar}[H_P, \rho] \\ & - \Gamma \left( \{\sigma^+ \sigma^- \rho\}_+ - 2\sigma^- \rho \sigma^+ \right) - \kappa \left( \{a^+ a, \rho\}_+ - 2a \rho a^+ \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$H_{J.C.} = -\hbar\delta_a \sigma^+ \sigma^- - \hbar\delta_c a^+ a + \hbar g(a\sigma^+ + \sigma^- a^+) \quad (4.23)$$

$$H_P = -i\hbar\eta(a - a^\dagger) \quad (4.24)$$

$H_{J.C.}$  i  $H_P$  prepoznavamo kao Jaynes-Cummings Hamiltonijan i Hamiltonijan pumpanja. Ovdje ćemo navesti rezultate modeliranja koji su važni za razumijevanje sustava i efekata očekivanih u eksperimentu. Detaljan izvod svih jednadžbi može se pronaći u [6].

Ovisno o tome jesu li gubici fotona iz rezonatora spori ili brzi, optičke rezonatora dijelima na rezonatore visoke i niske kvalitete. U slučaju visoke kvalitete vrijeme života fotona je dugačko, foton može obaviti do  $10^3$  ili više ciklusa unutar rezonatora prije nego se izgubi transmisijom kroz zrcalo. Posljedica toga su vrlo uske linije modova rezonatora i vrlo veliki faktor dobrote  $Q$ . Takvi rezonatori se mogu realizirati zrcalima velike finese ( $10^4 - 10^6$ ).

U rezonatorima visoke kvalitete dolazi do novih mehanizama hlađenja i samorganizacije koji se ne mogu postići u rezonatorima niske kvalitete gdje atome i dalje hladimo radijativnim hlađenjem opisanim u prethodnom poglavlju. Nedostaci pri-

sutni u takvoj vrsti hlađenja, koje se još naziva i Doppler hlađenje, su ovisnost o energijskoj strukturi atoma i upotreba dodatnih lasera koji atome vraćaju u osnovno stanje kako nebi izašli iz ciklusa apsorpcije-spontane emisije i prestali se hladiti. Te najbitnije, minimalna temperatura (tzv. Dopplerova temperatura) do koje se atom može ohladiti ograničena je sa širinom atomske linije odnosno vremenom života atoma u pobuđenom stanju, stotinjak  $\mu K$  za slučaj alkalijskih atoma.

Za razliku od tog radijativnog hlađenja, u optičkim rezonatorima se javlja mehanizam hlađenja koje se može vršiti daleko od elektronskih prijelaza i pritom se ne oslanja na specifičnu energijsku strukturu. Moguće je hladiti kompleksne atome, ione, molekule, čak i nanočestice. Minimalna temperatura koja se može postići je definirana stopom gubitka fotona iz rezonatora, što nije intrinzično svojstvo čestice koja se hladi. S obzirom da je u rezonatorima visoke finese  $\kappa > \Gamma$ , hlađenjem unutar rezonatora moguće je postići temperature niže od Dopplerove.

U ovom poglavlju ćemo dati osnovne jednačbe sustava i model za razumijevanje hlađenja atoma pomoću optičkog rezonatora.

#### 4.2.2 Sila na atom u optičkom rezonatoru

Prije razmatranja sile moramo promotriti kako prisustvo atoma u rezonatoru utječe na rezonatorske modove.

U slučaju praznog rezonatora, spektri transmisije i refleksije su dani sljedećim relacijama: [15, 16]

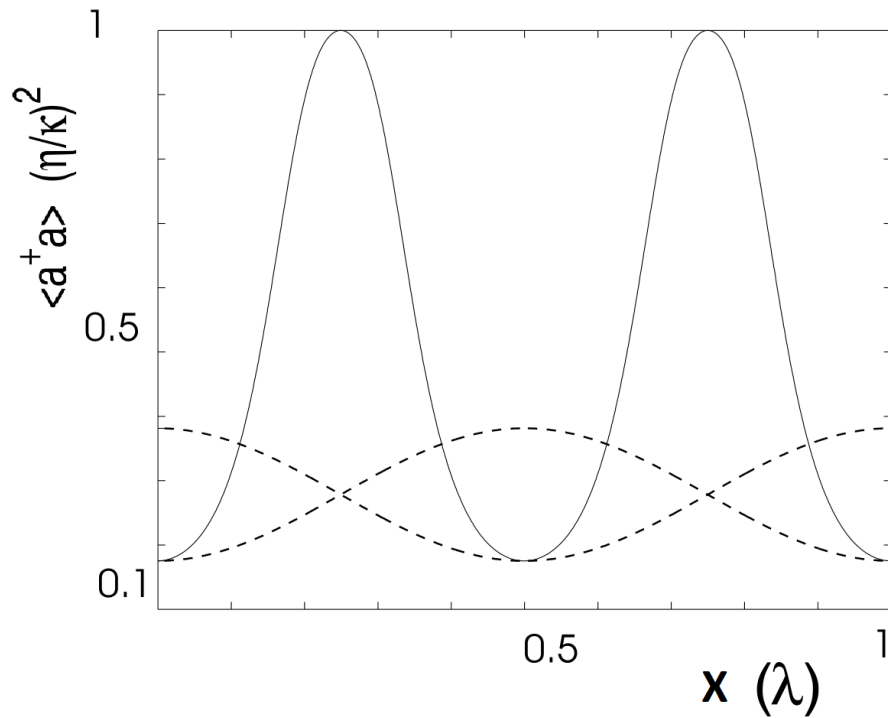
$$\langle a \rangle_{refl} = \frac{\eta}{\sqrt{2\kappa}} \frac{i\Delta_c}{2\kappa + i\Delta_c} \quad (4.25)$$

$$\langle a \rangle_{trans} = \frac{\eta}{\sqrt{2\kappa}} \frac{-2\kappa}{2\kappa + i\Delta_c} \quad (4.26)$$

Vidimo kako je transmitirani intenzitet maksimalan kad se sustav pobuđuje laserom frekvencije jednake frekvenciji rezonatorskog moda ( $\Delta_c = 0$ ), dok za slučaj kada je frekvencija lasera različita od frekvencije rezonatorskog moda većina svjetlosti bude reflektirana natrag. No ova slika se mijenja dodatkom atoma u rezonator.

Intenzitet svjetlosti unutar rezonatora ovisi o položaju atoma u rezonatoru. Atom, koji se može promatrati kao polarizabilna čestica određenog indeksa loma, pomiče frekvenciju rezonantnog moda, pa time mijenja i spektre transmisije i refleksije. U slučaju kada je  $\Delta_c = 0$ , odnosno u slučaju rezonantnog pobuđenja, maksimum intenziteta u rezonatoru (što je ujedno i maksimum transmitiranog intenziteta) dobiva se

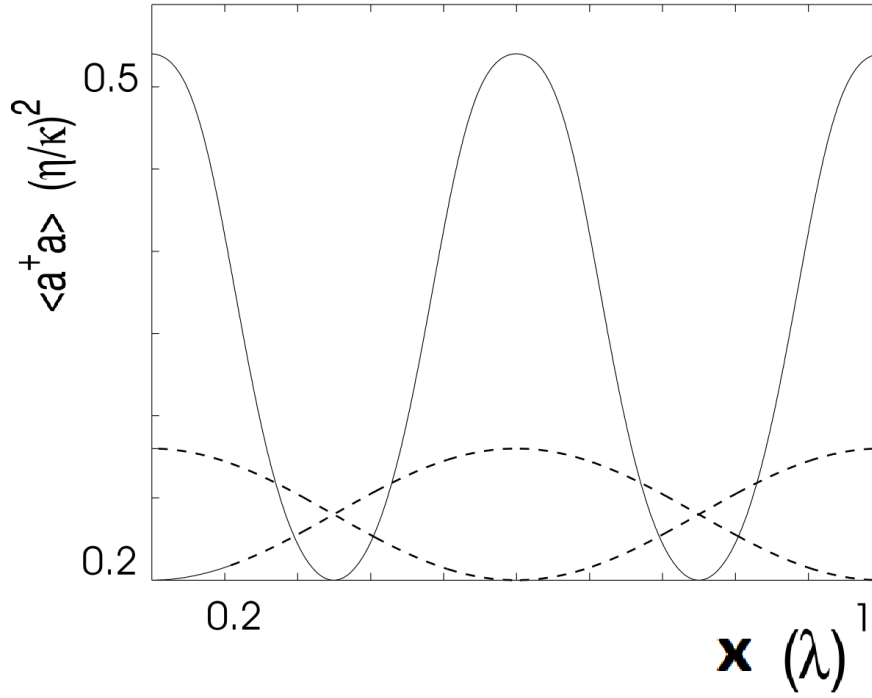
za slučaj kada je atom smješten u čvor stojnog vala. U tom slučaju rezonator "ne vidi" atom jer se nalazi na mjestu gdje je električno polje uvijek nula. U slučaju kada se atom nalazi na trbuhu stojnog vala, dolazi do međusobnog vezanja atoma i fotona unutar rezonatora, to vezanje pomiče frekvencije van rezonancije i gubi se intenzitet unutar rezonatora, a time i transmitirani intenzitet. Tu ovisnost transmitiranog intenziteta o položaju možemo vidjeti na Slici. 4.3.



Slika 4.3: Ovisnost intenziteta transmitirane zrake o položaju atoma u rezonatoru (puna linija) za slučaj rezonantne pobude laserom. Stojni valovi rezonatora (crtkana linija) ucrtani za jasnoću. Atomi u maksimumu stojnog vala se vežu na modove rezonatora i pomiču rezonanciju što uzrokuje smanjenje intenziteta. Preuzeto iz [6].

U slučaju kada se rezonator pobuđuje s laserom čija je frekvencija daleko od frekvencije rezonatorskog moda (ne-rezonantno pobuđivanje, transmisija je nula u slučaju praznog rezonatora), maksimum intenziteta u rezonatoru (a time i transmitiranog intenziteta) postizemo za slučaj kada se atom nalazi na trbuhu stojnog vala (u najjačem vezanju fotona i rezonatora). Tada interakcija atoma i rezonatora pomiče frekvenciju rezonantnog moda pa ona postaje rezonantna s laserom. Primjer takvog pobuđivanja laserom izvan rezonancije možemo vidjeti na Slici. 4.4.

U analogiji sa Dopplerovom silom, moguće je izračunati silu koja djeluje na atome u rezonatoru. Detalji računa mogu se pronaći u [6], a ovdje je na Slici 4.5 prikazan osnovni rezultat. Električno polje unutar rezonatora čini stojni val, stoga je sila koja



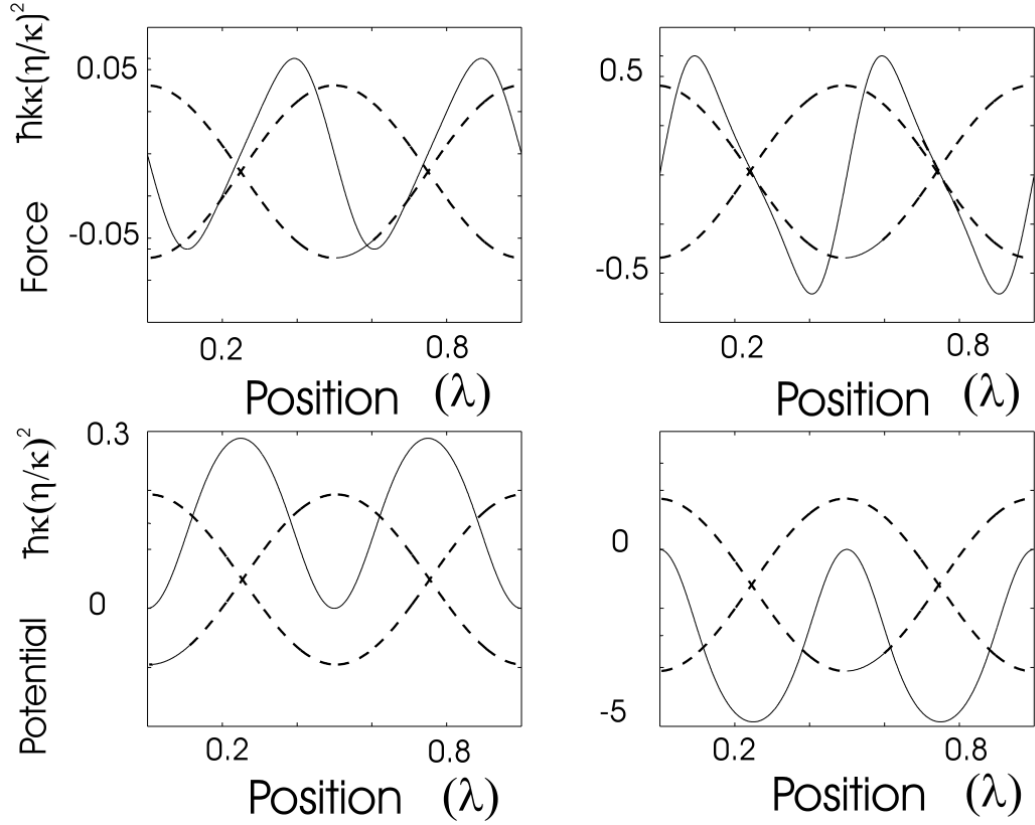
Slika 4.4: Ovisnost intenziteta transmitirane zrake o položaju atoma u rezonatoru (puna linija) za slučaj ne-rezonantne pobude laserom. Stojni valovi rezonatora (crtkana linija) ucrtani za jasnoću. Atomi u maksimumu stojnog vala se vežu na modove rezonatora i pomiču sustav prema rezonanciji. Preuzeto iz [6].

djeluje na atom u takvom polju jednaka dipolnoj sili. Dipolna sila je konzervativna, pa se može prikazati pomoću potencijala.

Na Slici. 4.5 je u gornjem redu prikazana sila, a u donjem redu potencijal koji osjećaju mirni atomi ( $\vec{v}=0$ ) smješteni u optički rezonator kada je pumpni laser ugođen crveno od atomske rezonancije ( $\Delta_a < 0$ , slike lijevo) i kada je pumpni laser ugođen plavo od rezonancije ( $\Delta_a > 0$ , slike desno). Na slikama je crtkanim linijama prikazan stojni val unutar rezonatora. Na lijevim slikama (crveni detuning) atomi se pod utjecajem dipolne sile smještaju u potencijalne minimume koji se nalaze na položajima trbuha stojnog vala (takvi se atomi nazivaju eng. high field seekers). Na slikama desno, minimum potencijala se nalazi na položajima čvorova stojnog vala, pa govorimo o eng. low field seekers atomima.

Dakle unutar rezonatora se osim hlađenja atoma događa i zarobljavanje, odnosno samoorganizacija atoma u minimume ili maksimume električnog polja ovisno o frekvenciji lasera kojeg koristimo za pobuđivanje.





Slika 4.5: Dipolna sila i potencijal (puna linija) za mirujuće atome pri  $\Gamma = 2\kappa$  i detuning  $\Delta = \Delta_a - \Delta_c = 8\kappa$ . U lijevim slikama je atomski detuning  $\Delta_a = -2\kappa$  (high field seeker) a u desnim  $\Delta_a = 10\kappa$  (low field seeker). Za usporedbu su ucrtani i stojni valovi (crtkana linija). Preuzeto iz [6].

#### 4.2.3 Hlađenje atoma u rezonatoru velike finese

Jednadžbe koje opisuju sustav rezonatora vrlo velike finese u koji je smješten atom mase  $m$  i impulsa  $p$ , a pobuđuje se sa detuningom  $\Delta_c$  prikazane su relacijama (4.27 – 4.29). Diferencijalne jednadžbe opisuju vezanje atoma i električnog polja lasera koje je povećano zbog višestrukih refleksija fotona prije nego se izgube iz rezonatora, tako položaj  $x$  ima velik utjecaj na efektivni indeks loma te dinamiku sistema. Detaljni izvod jednadžbi se može pronaći u [11, 12]

$$\dot{\alpha} = [-\kappa - \gamma(x) + i\Delta_c - iU(x)]\alpha + \eta \quad (4.27)$$

$$\dot{p} = -|\alpha|^2 \frac{d}{dx} U(x) \quad (4.28)$$

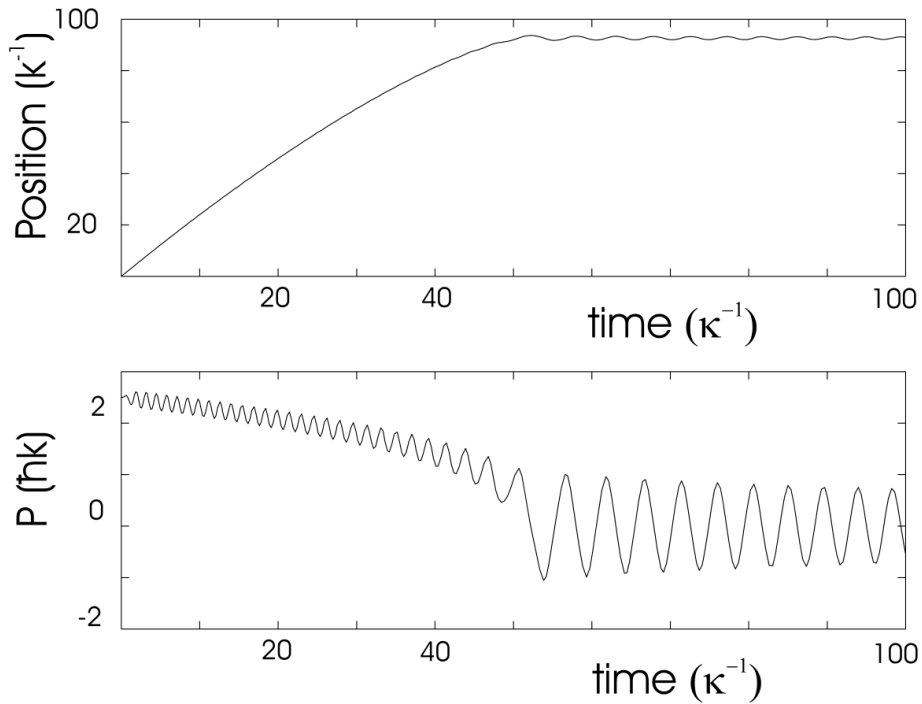
$$\dot{x} = \frac{p}{m}. \quad (4.29)$$

$U(x)$  je potencijal koji atom osjeća uslijed električnog polja u rezonatoru,  $\alpha$  je broj fotona u rezonatoru, a  $\eta$  je stopa pumpanja rezonatora.  $\gamma(x) = \gamma_0 \cos^2(kx)$  jest stopa kojom se svjetlost raspršuje na atomu te ovisi o prostornoj raspodjeli polja za koje smo ovdje pretpostavili da je sinusoidalno, a detuning  $\Delta_c = \omega_P - \omega_c$  je razlika frekvencije fotona i rezonantne frekvencije praznog rezonatora.

Na Slici. 4.6 je prikazano rješenje gornjih jednažbi za parametre koji odgovaraju kvalitetnom rezonatoru velike finese gdje je ovakvo hlađenje pomoću rezonatora moguće:

$$\sqrt{\Gamma^2 + \Delta_a^2} g \gg \kappa \quad (4.30)$$

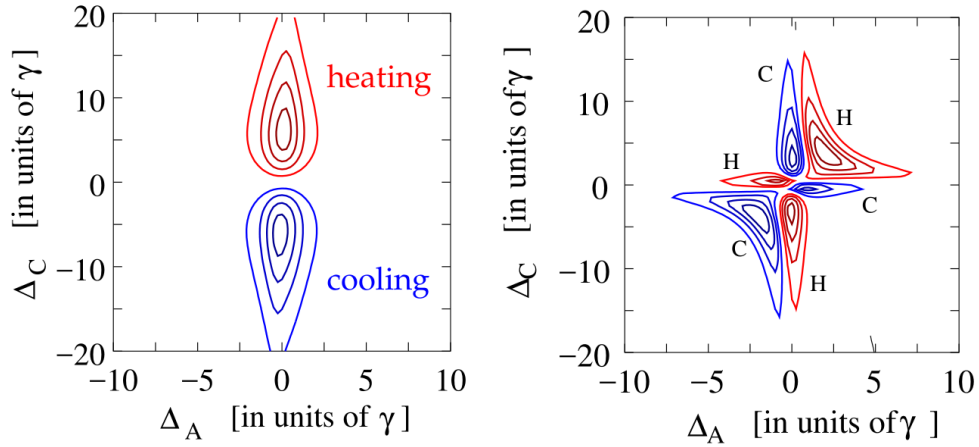
$$\Delta_c \approx 0 \quad (4.31)$$



Slika 4.6: Hlađenje čestice koja se giba u stojnom valu unutar rezonatora. Na gornjoj slici prikazana je putanja atoma, a na donjoj impuls koji je proporcionalan brzini atoma. Uslijed interakcije s modovima rezonatora čestici se smanjuje impuls, te ona dolazi do stacionarnog položaja, oko kojeg oscilira. Preuzeto iz [6].

Mogućnost hlađenja općenito ovisi o parametrima  $\Delta_a$  i  $\Delta_c$ , te su se numeričkim rješavanjem kompletnog Hamiltonijana (4.18-4.21) pronašli uvjeti hlađenja i grijanja atoma, Slika 4.7 [7]. U slučaju "lošeg" rezonatora niske finese vidimo Doppler hlađenje, no u slučaju dobrog rezonatora velike finese dobivamo kompleksniju ovis-

nost parametara za koje je moguće hlađenje. U idućem poglavlju, objasniti ćemo mehanizam hlađenja u optičkom rezonatoru uvođenjem dressed stanja.



Slika 4.7: Konturni prikaz područja hlađenja (plavo) i grijanja (crveno) u ovisnost o detuningu atoma ( $\Delta_a$ ) i rezonatora ( $\Delta_c$ ). Režim rezonatora loše kvalitete, odnosno male finise, (lijevo)  $g = \lambda/2, \kappa = 10\Gamma$  i režim kvalitetnog rezonatora (desno)  $g = 3\Gamma, \kappa = \Gamma$ . Preuzeto [7].

#### 4.2.4 Dressed stanja

Mehanizam hlađenja atoma u rezonatoru koji je pobuđen laserom može se objasniti upotrebljavajući sliku spregnutih stanja, eng. dressed states. Hilbertov prostor sistema se može prikazati kao produkt prostora atomskih stanja ( $|e\rangle$  i  $|g\rangle$ ) i stanja sa  $n$  fotona u rezonatoru ( $|n\rangle$ ). Svojstveni vektori  $H_{JC}$  Hamiltonijana mogu se prikazati u bazi  $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$ . U toj bazi Jaynes Cumming Hamiltonijan se može zapisati kao (4.32). Hamiltonijan se u toj bazi može dijagonalizirati te slika koja se dobije je vrlo ilustrativna za objašnjenje mehanizma hlađenja.

$$H_{J.C.} = \begin{pmatrix} -\Delta_a - n\Delta_c & \frac{\omega_R}{2} \\ \frac{\omega_R}{2} & -(n+1)\Delta_c \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

$\omega_R = 2g\sqrt{n+1}$  je rezonantna Rabijeva frekvencija eksplicitno zapisana u slučaju ovakvog Hamiltonijana. Dijagonalizirajući navedenu matricu možemo naći svojstvene vrijednosti energije: [6]

$$\lambda_+ = -(n+1)\Delta_c - \frac{\Delta}{2} + \frac{\Omega_n}{2} \quad (4.33)$$

$$\lambda_- = -(n+1)\Delta_c - \frac{\Delta}{2} - \frac{\Omega_n}{2}, \quad (4.34)$$

gdje je atom-rezonator frekventni pomak definiran kao:

$$\Delta = \Delta_a - \Delta_c = \omega_c - \omega_{10}, \quad (4.35)$$

a efektivna Rabijeva frekvencija kao:

$$\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4g_n^2}. \quad (4.36)$$

Svojstvene vrijednosti imaju pridružene svojstvene vektore:

$$|+, n\rangle = \text{sgn}(\omega_R) \sqrt{\frac{\Omega - \Delta}{2\Omega}} |e, n\rangle + \sqrt{\frac{\Omega + \Delta}{2\Omega}} |g, n+1\rangle \quad (4.37)$$

$$|-, n\rangle = \sqrt{\frac{\Omega + \Delta}{2\Omega}} |e, n\rangle + \text{sgn}(\omega_R) \sqrt{\frac{\Omega - \Delta}{2\Omega}} |g, n+1\rangle \quad (4.38)$$

Uvedimo još i stanja

$$|0\rangle = |g, 0\rangle, \quad (4.39)$$

$$|+\rangle = |+, 0\rangle, \quad (4.40)$$

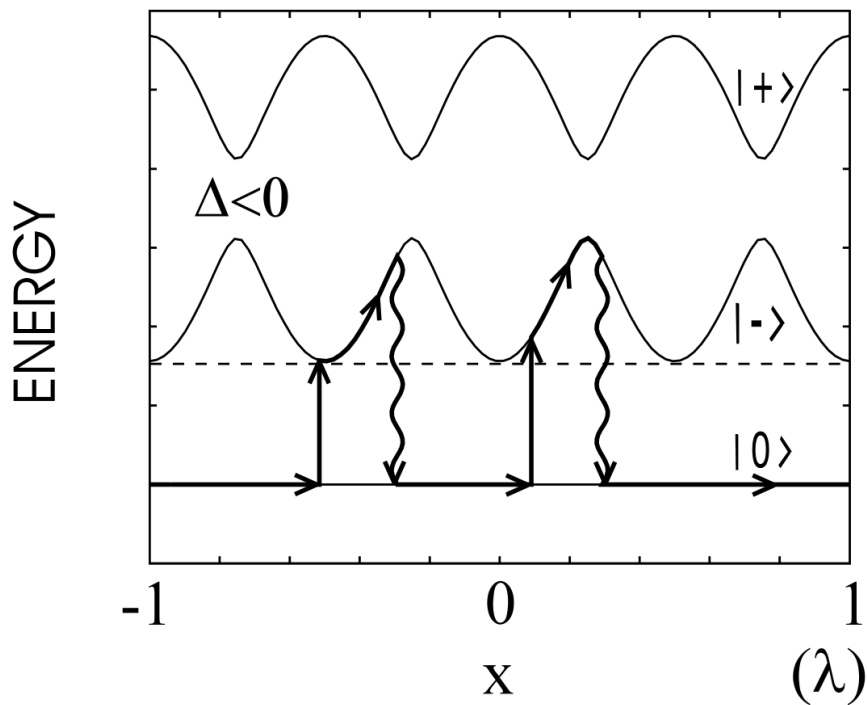
$$|-\rangle = |-, 0\rangle, \quad (4.41)$$

gdje su stanja  $|+\rangle$  i  $|-\rangle$  linearna kombinacija  $|g, 1\rangle$  i  $|e, 0\rangle$  (4.37-4.38), te promotrimo kako izgledaju potencijali za ova vezanja stanja atoma i fotona, Slika 4.8.

Atom se giba unutar rezonatora, te prati jedno od  $|0\rangle$ ,  $|+\rangle$  ili  $|-\rangle$  stanja. Stanje  $|0\rangle$  je konstantne energije u prostoru s obzirom da njega čine osnovno stanje atoma i 0 vezanih fotona. Potencijal stanja  $|+\rangle$  i  $|-\rangle$  se mijenja u prostoru zbog toga jer posjeduju svojstva atomskog pobuđenja  $|e\rangle$  i pobuđenog stanja fotona  $|1\rangle$ . Zbog toga se mogu relaksirati u stanje niže energije u karakterističnim vremenima  $\kappa^{-1}$  i  $\gamma^{-1}$ . Kako je  $\gamma$  ovisan o prostoru zbog vezanja atoma i rezonatora, stanja  $|+\rangle$  i  $|-\rangle$  dobivaju prostornu ovisnost stope raspada.

Ako je frekvencija pobudnog lasera jednaka frekvenciji moda rezonatora i manja od energije pobude atoma ( $\omega_P = \omega_c < \omega_{10}$ ), dolazi do pobuđivanja iz  $|0\rangle$  u minimum stanja  $|-\rangle$ , Slika 4.8. Nakon pobuđenja u minimum potencijala stanja  $|-\rangle$  atom se nastavlja gibati po rezonatoru i neovisno o smjeru brzine se penje uz potencijalnu

jamu, pri čemu mu se povećava potencijalna energija na uštrb kinetičke energije koja se smanjuje, odnosno atomu se smanjuje brzina. Ako je vrijeme relaksacije fotona  $\kappa$  dovoljno kratko atom će se spustiti u  $|0\rangle$  stanje prije nego dosegne maksimum potencijala i nastaviti gibanje po ravnom  $|0\rangle$  potencijalu sa manjom brzinom nego prije. Kada dođe do položaja idućeg minimuma će se pobuditi i ponoviti ciklus smanjenja kinetičke energije i efektivno mu se svakim ciklusom smanjuje temperatura. Ovaj mehanizam je analogan sub-Dopplerovom hlađenju u slobodnom prostoru i naziva se Sizifovo hlađenje.



Slika 4.8: Atom se pumpa u minimum donjeg dressed stanja, i onda u kojem god smjeru išao se penje uz potencijalne jame i gubi kinetičku energiju dok se stanje spontano ne raspadne i on se vrati u  $|g, 0\rangle$  stanje koje ne osjeća potencijal i giba se slobodno do mjesta minimuma te započinje ciklus ispočetka. Preuzeto iz [6].

### 4.3 Hlađenje atoma upotrebom višemodne svjetlosti

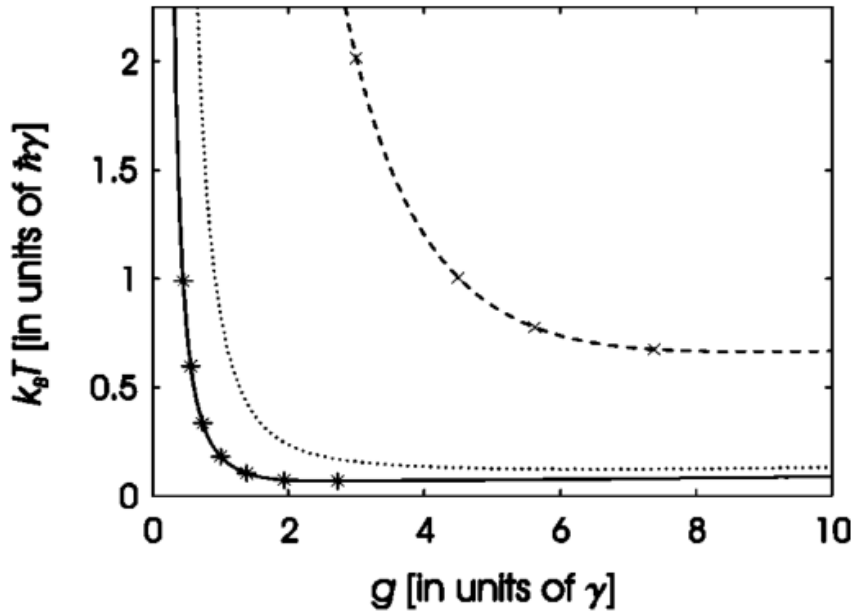
Dinamika atoma u rezonatoru se uvelike mijenja u slučaju da istovremeno pobuđujemo nekoliko modova rezonatora. Glavni uzrok je to što optički potencijal dobiva kompliciraniju prostornu ovisnost. Gdje je dosad bio konstantan ili sporo mijenjajuća sinusoida, istodobnim pobuđivanjem većeg broja modova optički potencijal postaje kompleksna, dinamička veličina. U slučaju pobuđenja samo jednog moda rezonatora

prostor djelovanja sile hlađenja je ograničen na mjesta velikog gradijenta i iznosa električnog polja. U slučaju istovremenog pobuđenja nekoliko modova, prostor gdje električno polje ima značajan gradijent i intenzitet zauzima veći dio prostora i atom se brže hladi.

Pobuđenje dodatnih modova efektivno povećava konstantu vezanja između atoma i polja. Efektivna konstanta vezanja može se prikazati relacijom (4.42), gdje je  $g$  konstanta vezanja pri pobuđenju samo jednog moda, a  $N$  je ukupan broj pobuđenih modova. Na Slici 4.9 možemo vidjeti kako je u slučaju korištenja višemodnog lasera potreban manji intenzitet za postizanje iste temperature.

$$g_{eff} = g \frac{(2N + 1)!!}{(2N)!!}. \quad (4.42)$$

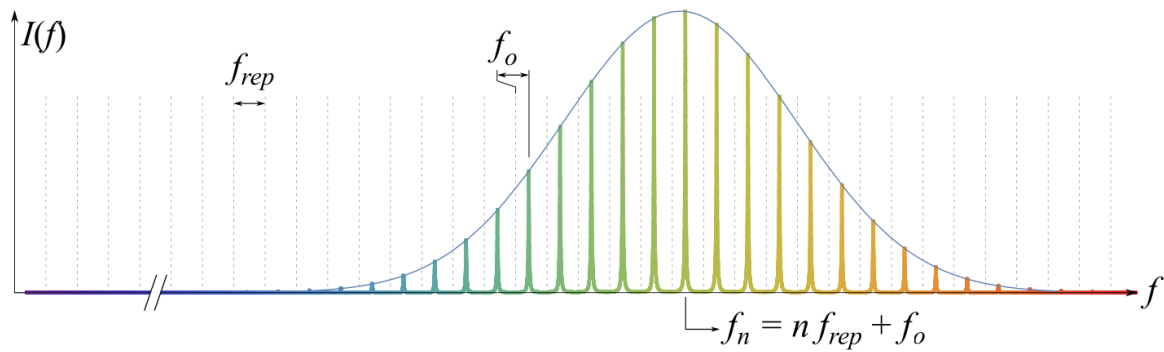
Vidimo približno linearan rast efektivne konstante vezanje  $g_{eff}$  sa povećanjem  $N$  [14].



Slika 4.9: Konačna temperatura u ovisnosti o efektivnoj konstanti vezanja  $g_{eff}$ , u slučaju  $\kappa = \gamma$  (crtkana linija) i  $\kappa = \gamma/10$  (puna linija). Prikazano je i hlađenje u slučaju pobuđivanja samo jednog moda (točkana linija) promjena efektivne konstante vezanja ostvaruje promjenom intenziteta, a ne promjenom broja modova. Preuzeto iz [14].

Istodobno pobuđivanje nekoliko modova rezonatora može se realizirati u eksperimentu pobuđivanjem sa nekoliko lasera različite frekvencije ili upotrebom optičkog frekventnog češlja čiji se spektar sastoji od niza uskih, jednako razmaknutih spek-

tralnih linija i idealan je izvor za pobuđivanje modova rezonatora. Spektar takvog frekventnog češlja možemo vidjeti na Slici 4.10.



Slika 4.10: Intenzitet optičkog frekventnog češlja u ovisnosti o frekvenciji. Spektralne linije se ponavljaju frekvencijom repeticije  $f_{rep}$ , i odmaknute su od nulte frekvencije za neki pomak, eng. offset  $f_o$ . Preuzeto iz [17].

#### 4.4 Simulacije dinamike atoma u višemodnom rezonatoru

Simulacije su vršene kodom razvijenim od strane istraživačke skupine Helmuta Ritscha na Institutu za teorijsku fiziku Sveučilišta u Innsbrucku. Rješava se sustav rezonatora koji je transverzalno pobuđen svjetlošću čiji se spektar sastoji od niza frekvencija. Kao posljedica takvog pobuđivanja, u rezonatoru se nalazi nekoliko stojnih valova valnog broja  $k_m$ . Razmatrano je samo jedno-dimenzionalno gibanje u smjeru glavne osi rezonatora, osi  $x$ . Za električno polje modova lasera je pretpostavljen oblik sinusa i kosinusa.

Implementacija je napravljena u programskom jeziku Julia pomoću Monte-Carlo metode simulacija. Skup jednadžbi implementiran u kodu se može pronaći u [21], i izgleda ovako:

$$\dot{x}_j = \frac{p_j}{m} \quad (4.43)$$

$$\dot{p}_j = \hbar \sum_m \eta_m k_m \sin(k_m x_j + \phi_m) (\alpha_m + \alpha_m^*) \quad (4.44)$$

$$\dot{\alpha}_m = (i\Delta_{c,m} - \kappa_m)\alpha_m - i\eta_m N \Theta + \xi_m, \quad (4.45)$$

gdje je  $\alpha_m$  broj fotona sadržan u pojedinom modu  $m$ ,  $\eta_m$  intenzitet pobude pojedinog moda, a  $\Theta_m$  parametar uređenja atoma u rezonatoru:

$$\Theta_m = \frac{1}{N} \sum_i \cos(k_m x_i + \phi_m) \quad (4.46)$$

Atomi su nasumično postavljeni u odabrani prostorni interval, s Maxwell-Boltzman raspodjelom impulsa koja odgovara željenoj početnoj temperaturi atoma.

Rješavanjem vezanih diferencijalnih jednadžbi (4.43-4.45), bilo je moguće izračunati putanju,  $x(t)$ , i moment impulsa,  $p(t)$ , atoma koji se gibaju u rezonatoru pobuđenom višemodnom svjetlošću.

Zanimali su nas efekti hlađenja, tj. smanjenje širine distribucije momenta impulsa i efekti samoorganizacije, tj. nakupljanje atoma u stacionarne položaje koji su određeni minimumom ili maksimumom električnog polja unutar rezonatora. Samoorganizacija atoma ovisi o snazi pojedine frekvencije pobudnog lasera. Tek kada je snaga svake frekventne komponente iznad neke kritične vrijednosti dolazi do samoorganizacije. U suprotnom, atomi se gibaju unutar rezonatora po nasumičnim



putanjama i nema stabilnih položaja. Na Slici 4.11 je prikazana ovisnost položaja atoma o vremenu u uvjetima male snage pobudnih lasera. Vidimo da u uvjetima malog broja fotona u rezonatoru, atomi ne osjećaju dipolnu silu koja bi ih zatočila u potencijalne minimume i te dovela do samoorganizacije.

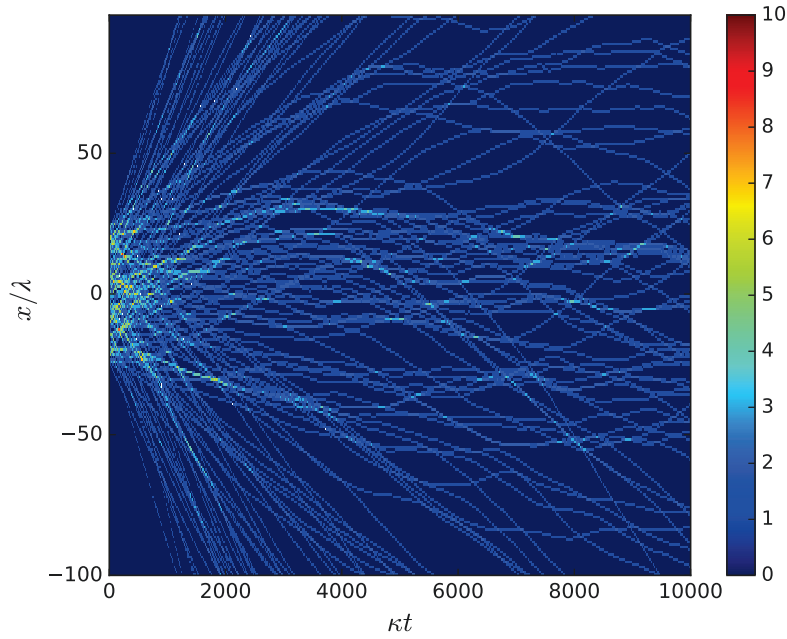
Racun je proveden za 150 atoma početne temperature  $T_0 = 10\hbar\kappa/k_b$ , istovremeno se pobuđivalo 8 rezonatorskih modova, frekvencije pobudnih lasera bile su udaljene za  $\kappa$  od rezonantnih frekvencija modova ( $\Delta_c = \kappa$ ), a rezonantna frekvencija atoma bila je puno veća od frekvencije modova rezonatora i pobudnih lasera. Rezultat je u skladu sa [20]. Intenzitet laserskog moda  $m$  izrazava se preko velicine  $\zeta_m$ , koja iznosi 1 za intenzitet lasera koji odgovara kritičnom intenzitetu:

$$\zeta_m = \frac{4N\eta_{nm}^2\Delta_{c,m}^2}{(\Delta_{c,m}^2 + \kappa_m^2)^2}. \quad (4.47)$$

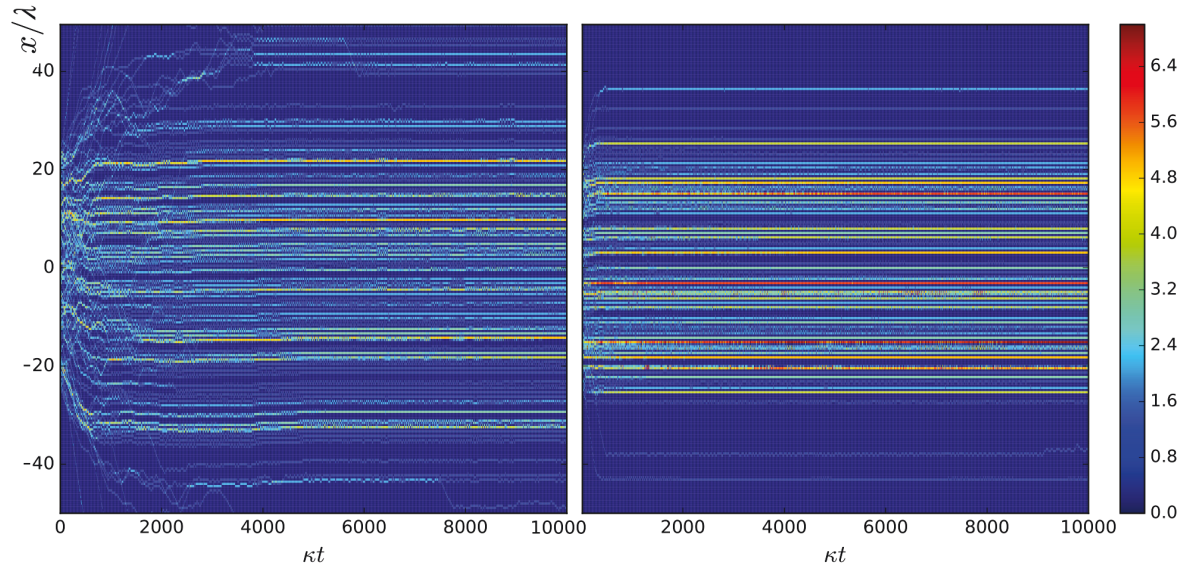
Za vrlo mali broj fotona gibanje atoma nije ograničeno, Slika 4.11, te se udaljavaju proizvoljno daleko od početnog položaja. Za intenzitete veće od kritičnog putanja atoma ostaje lokalizirana, te možemo reći da se nakon određenog vremena interakcije atomi samoorganiziraju u prostoru. Konačna prostorna distribucija je periodična s periodom  $\lambda$ . Na Slici 4.12 prikazane su putanje atoma za dvije vrijednosti  $\zeta$ , obje odgovaraju snagama iznad kritične snage te se odvija samoorganizacija. Sa Slike 4.13 je vidljivo da se početna nasumična raspodjela atoma promjeni u periodičnu raspodjelu perioda  $\lambda$ . Svi ostali parametri u računu jednaki su kao u prethodnoj slici. Povećanjem intenziteta postizemo bržu i prostorno užu raspodjelu atoma, jer niti najenergičnije čestice ne stignu pobjeći daleko od početnog položaja.

Promatrajući parametar uređenja  $\Theta$  za slučaj visokog intenziteta možemo vidjeti kako se atomi ne vežu na sve modove podjednako, Slika. 4.14. Pojedini modovi predvladaju i određuju organizaciju atoma, dok drugi uopće ne utječu na prostornu raspodjelu.

No intenzitet igra različitu ulogu ako promatramo hlađenje atoma. Čak i za intenzitete manje od kritičnog atomi se hlade, no mali intenzitet znači sporo hlađenje. Povećanjem intenziteta se stopa hlađenja povećava, odnosno atomi se brže hlade dok pri prevelikom intenzitetu ( $\zeta = 20$ ) atomi koji se u početku nalaze u maksimumu potencijala efektivno dobivaju još energije i početna temperatura raste. Čak zanemarujući to povećanje početne temperature takav veliki intenzitet narušava kvantna

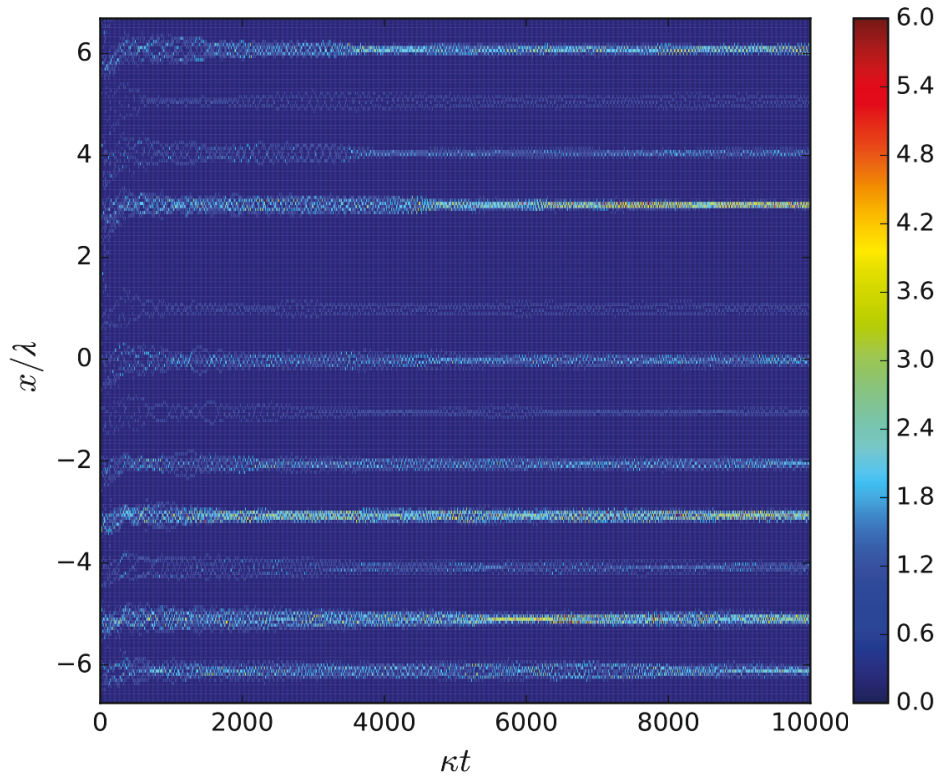


Slika 4.11: Položaj atoma u ovisnosti o vremenu za intenzitet pojedinog moda pobudnog lasera od  $0.7 \zeta_m$ . Uz premalen intenzitet atomi nisu ograničeni i proizvoljno se udaljavaju od početnog položaja. U  $t = 0$  atomi su bili nasumično raspodijeljeni unutar prostora  $x \pm 25\lambda$ , s početnom temperaturom od  $k_b T_0 = 10\hbar\kappa$ .

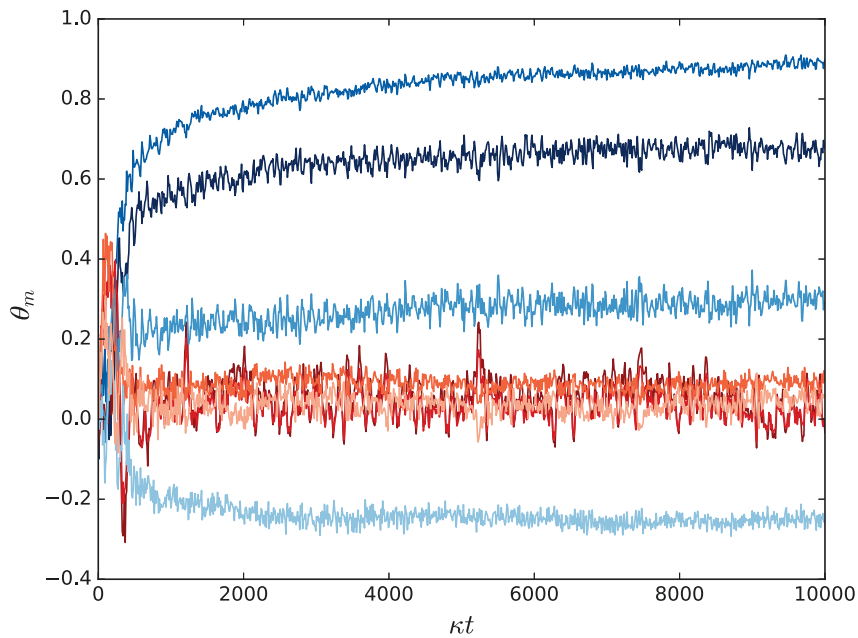


Slika 4.12: Položaj atoma u ovisnosti o vremenu za intenzitete od  $6 \zeta_m$  (lijevo) i  $20 \zeta_m$  (desno). Za veći intenzitet dolazi ranije do samoorganizacije atoma, a konačna prostorna distribucija je uža. U  $t = 0$  atomi su bili nasumično raspodijeljeni unutar prostora  $x \pm 25\lambda$ , s početnom temperaturom od  $k_b T_0 = 10\hbar\kappa$ .

međudjelovanja atoma i fotona te se hlađenje bitno usporava. Na Slici 4.15 prikazana je ovisnost srednje kinetičke energije atoma za različite snage pobudnih lasera. Ujedno na Slici 4.16 za pobudnu snagu lasera  $\zeta = 6$  pri istim parametrima možemo

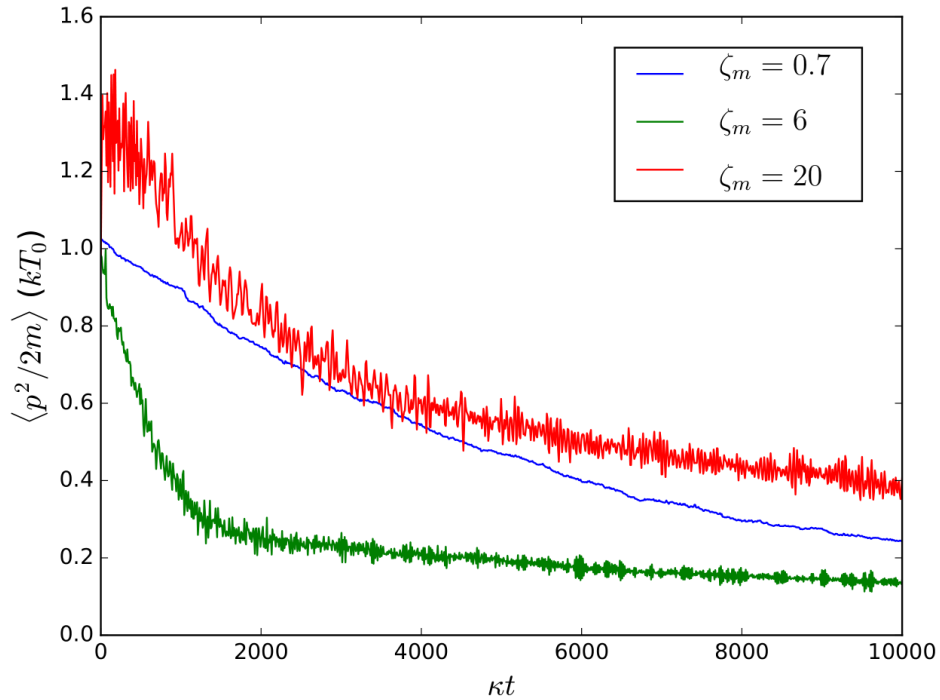


Slika 4.13: Ovisnost gustoće čestica o vremenu. Iz početne homogene raspodjele u vrlo malo vremena atomi se grupiraju u pakete međusobno udaljene za  $\lambda$ .



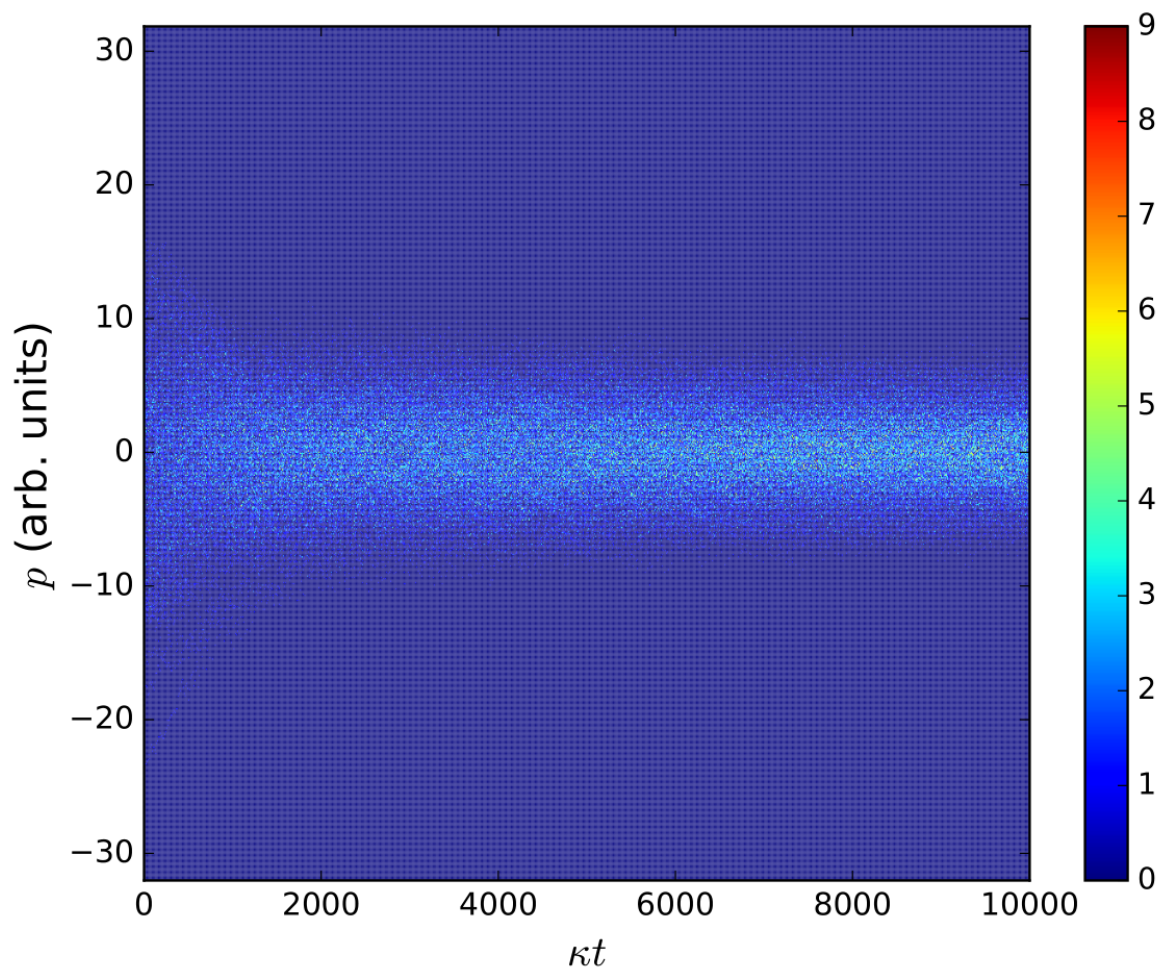
Slika 4.14: Ovisnost parametara uređenja o vremenu za 8 različitih modova za slučaj  $\zeta = 20$ . 4 moda (crveno) naizgled uopće ne sudjeluju u samoorganizaciji atoma.

vidjeti impulsnu distribuciju atoma u ovisnosti o vremenu, i kako se istu sužava prilikom gubitka kinetičke energije, odnosno hlađenja.



Slika 4.15: Ovisnost prosječne kinetičke energije čestice o vremena za tri različita intenziteta. Vidimo da za  $\zeta = 0.7$  hlađenje je sporije nego za  $\zeta = 6$  kad se dobiva najbrže hlađenje. U slučaju vrlo velikog intenziteta ( $\zeta = 20$ ) vidimo efekt grijanja gdje početna temperatura raste na  $1.3T_0$ .

Dok su analitička rješenja moguća tek uz ograničavajuće aproksimacije, a teorijska analiza daje samo kvalitativna rješenja. Numerička analiza daje kvantitativne rezultate za proizvoljne parametre eksperimenta, jedina ograničenja koja postoje su praktične prirode trajanja računa te rezolucija i broj čestica koji možemo simulirati.



Slika 4.16: Gustoća čestica u impulsnom prostoru u ovisnosti o vremenu. Konačna raspodjela impulsa je uža od početne, što ukazuje na smanjenje temperature atoma, odnosno hlađenje.

## 5 Eksperiment

Na Institutu za fiziku, u laboratoriju za hladne atome započeo je projekt u kojem se planira demonstrirati hlađenje atoma rubidija unutar optičkog rezonatora upotrebom optičkog frekventnog češlja. Ovim eksperimentom otvorit će se novi smjer istraživanja u području hladnih atoma na Institutu za fiziku.

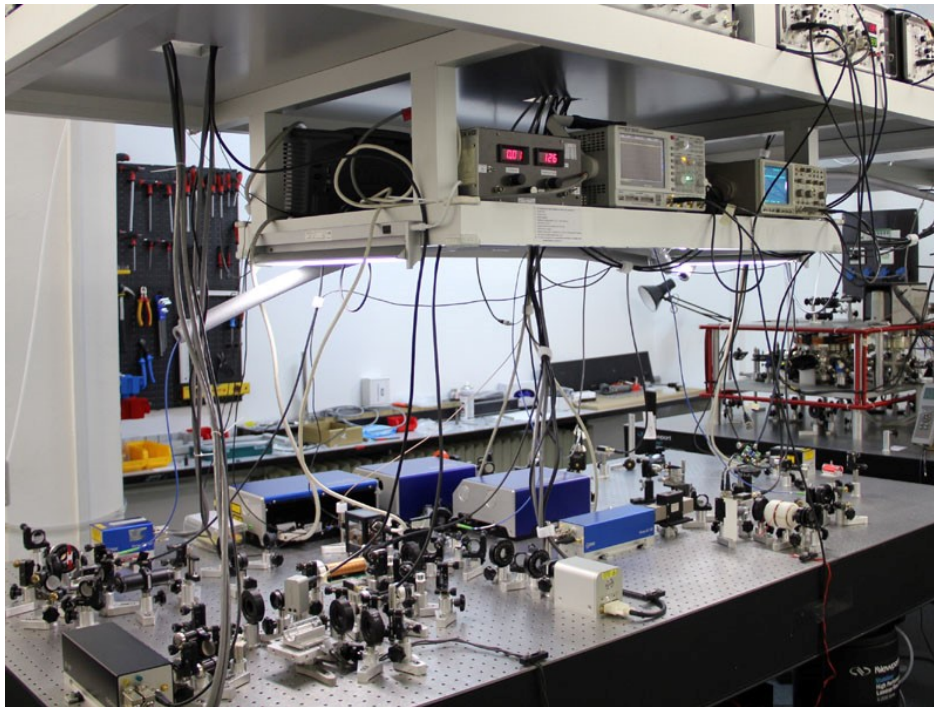
Hladni atomi stvaraju se u magneto-optičkoj stupici (MOT) upotrebom tri para suprotno-propagirajućih laserskih zraka,  $\sigma^+ - \sigma^-$  polarizacije, smještenih u ortogonalne prostorne smjerove. Za hlađenje se koristi eng. external-cavity diode laser (ECDL), kontinuirane emisije, ugođen crveno od frekvencije  $5^2S_{1/2} - 5^2P_{3/2}$  rezonantnog prijelaza u atomu rubidija. Osim laserom za hlađenje, atomi se obasjavaju i laserom za naseljavanje koji vraća atome koji su se relaksirali spontanom emisijom u neko drugo osnovno stanje natrag u ciklus hlađenja. Međudjelovanjem atoma sa ovakvom konfiguracijom lasera nastaje optička melasa, sila na atome je proporcionalna brzini, a po smjeru suprotna od smjera gibanja, što uzrokuje smanjenje brzine atoma, odnosno smanjenje kinetičke energije i hlađenje. Međutim, takav oblak hladnih atoma je vrlo rijedak s obzirom da zauzima cijeli volumen presjeka laserskih zraka koje su veličine i do 1 cm, stoga se uvodi gradijent magnetskog polja da bi se hladni atomi ograničili na manji prostor, čime bi se povećala njihova gustoća. Detaljni opis MOT-a i eksperimentalnog postava za hlađenje atoma na Institutu za fiziku može se pronaći u [17]. Fotografija laboratorija prikazana je na Slici 5.1.

U MOT komori stvara se sferni oblak hladnih atoma  $^{87}\text{Rb}$ , veličine radijusa oko 1.5 mm, koji sadrži oko  $10^7$  atoma  $^{87}\text{Rb}$ . Promjenom frekvencije pomaka lasera za hlađenje od frekvencije rezonancije atoma rubidija, moguće je mijenjati temperaturu atoma u rasponu 100-250  $\mu\text{K}$ . Takav prethlađeni oblak smještat će se u rezonator koji će se ugraditi u MOT komoru. Rezonator koji se sastoji od dva zrcala i PZT elementa postaviti će se u komoru koristeći posebno dizajnirane i izrađene nosače, kao što je prikazano na Slici 5.2.

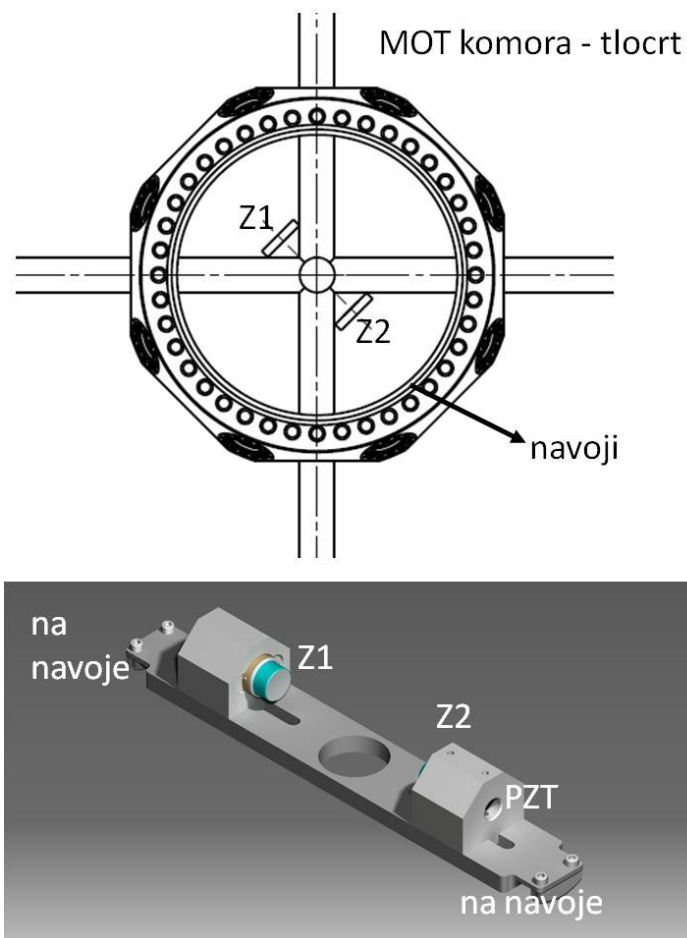
Prije postavljanja rezonatora u MOT komoru, potrebno je izgraditi i karakterizirati odgovarajući rezonator, te razviti tehniku stabilizacije i stabilizirati rezonator koristeći tu tehniku.

Upravo to je bio cilj eksperimentalnog dijela mog diplomskog rada.





Slika 5.1: Na prvom optičkom stolu su smješteni laseri, dok se na drugom optičkom stolu nalazi vakuumaska komora.

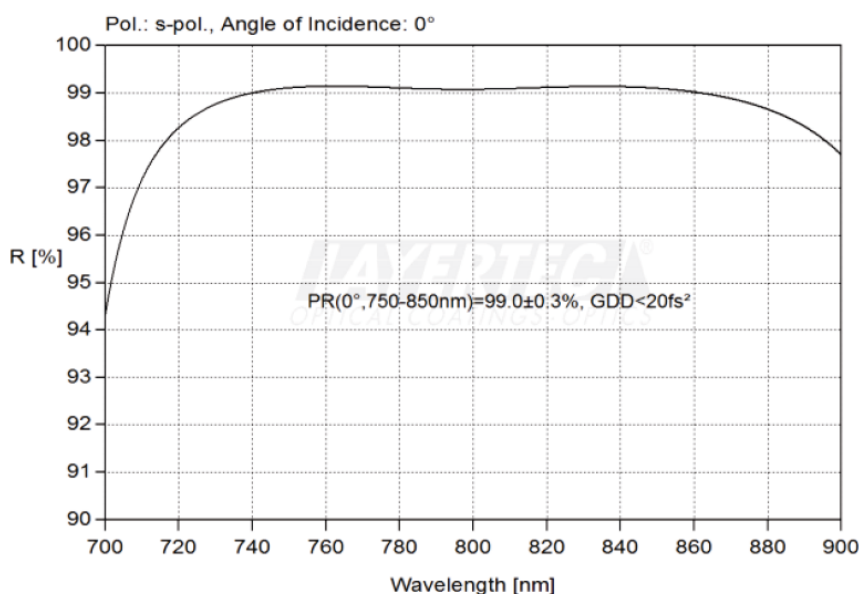


Slika 5.2: Nacrt rezonatora i njegov položaj u MOT komori. Preuzeto od [23].

## 5.1 Izrada konfokalnog rezonatora

U skladu s tehničkim nacrtom sa Slike. 5.2 izgrađeno je tijelo rezonatora. Napravljeno je od čelika te se sastoji od glavnog horizontalnog nosača na kojem se mogu translirati i učvrstiti dva manja nosača za zrcala Z1 i Z2. Mali nosači za zrcala imaju rupu centriranu na položaju zrcala za dolaznu, reflektiranu i transmitiranu lasersku zraku. Dok veliki nosač ima vertikalnu rupu centriranu ispod središta rezonatora kako bi se okomitom laserskom zrakom oblak doveo do osi rezonatora ili transverzalno pobuđivao laserom.

Za planirani eksperiment je potrebno izgraditi konfokalni rezonator. U tu svrhu su upotrebljena zrcala radijusa zakrivljenosti  $R = 5$  cm, što je ujedno odredilo i duljinu rezonatora na  $L = R = 5$  cm. Korištena su zrcala tvrtke Layertec 103239, koeficijenta refleksije  $R=99.11\%$  (Slika. 5.3) iz čega možemo odrediti finesu od  $\mathcal{F} \approx 352$ .



Slika 5.3: Ovisnost koeficijenta refleksije intenziteta o valnoj duljini upadne svjetlosti. Preuzeto iz specifikacija proizvođača Layertec.

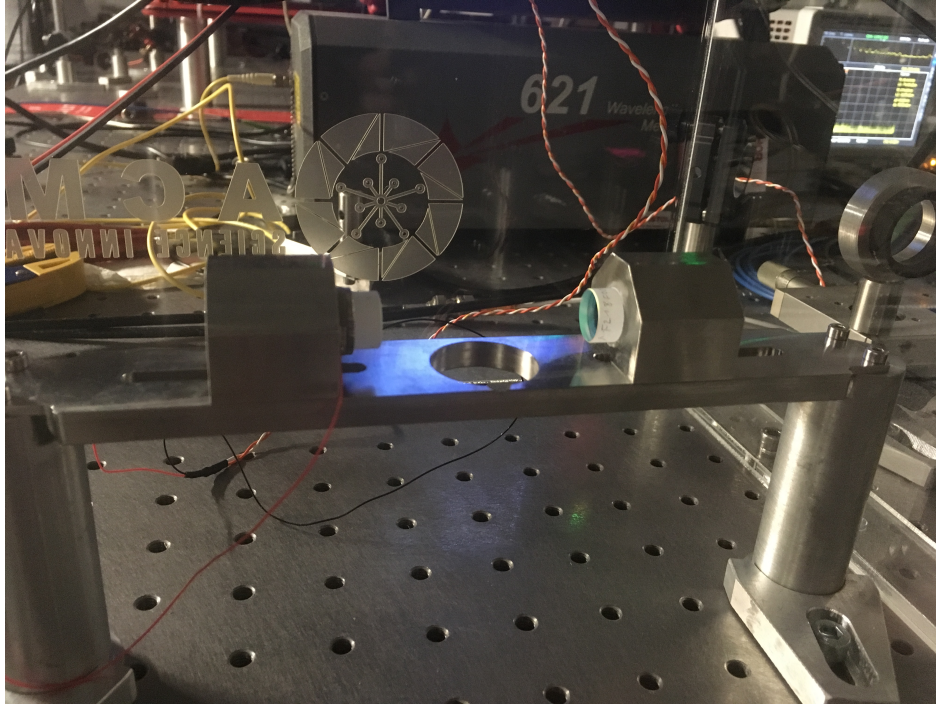
Jedno od zrcala je naljepljeno na piezoelektrični (PZT) element, što omogućava promjenu duljine optičkog rezonatora promjenom napona. Tako se mijenjaju i modovi rezonatora što olakšava ugašanje lasera na modove rezonatora.

Za ljepljenje zrcala i PZT elementa korišteno je visokotemperaturno epoksi ljepilo, pogodno za upotrebu u vakuumu jer neće otplinjavati nečistoće u komoru, te malog koeficijenta termalne ekspanzije. Prilikom ljepljenja su mjereni i popravljani longi-



tudinalni modove rezonatora (poglavlje 5.2.3). Zaljepljen rezonator možemo vidjeti na Slici. 5.4.

Mehanički šumovi iz okoline su bili preveliki za dobivanje dobrog signala pa je sustav stavljen unutar plastične kutije za izolaciju od okoline. Akustični šumovi su još uvijek stvarali probleme pa je kutija obložena akustičnom pjenom za zvučnu izolaciju.



Slika 5.4: Rezonator nakon ljepljenja zrcala na metalni postav. Vidi se crveno-bijela žica za piezoelektrični translator i plastična kutija u kojem se postav nalazi.

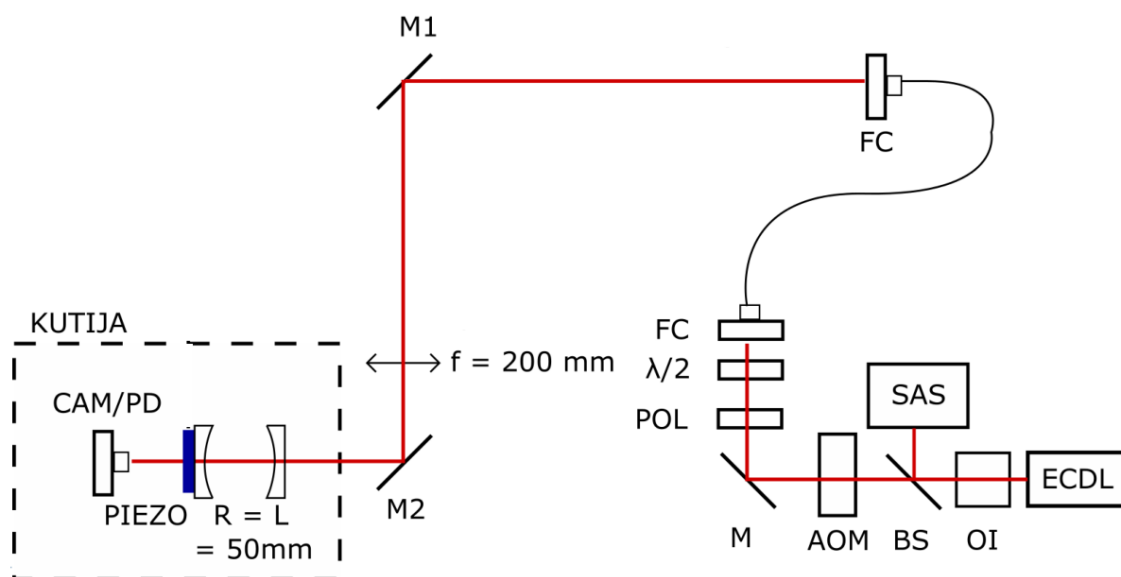
## 5.2 Karakterizacija konfokalnog rezonatora

Za karakterizaciju rezonatora bilo je potrebno složiti eksperimentalni postav u kojem se frekventno stabilizirani laser veže na rezonator, te se promatra transmisija lasera kroz rezonator za različite uvjete rezonatora i kvalitete vezanja lasera i rezonatora.

### 5.2.1 Eksperimentalni postav za karakterizaciju

Shema eksperimentalnog postava prikazana je na Slici. 5.5

Za generiranje laserskog snopa je korišten eng. external-cavity diode laser (ECDL) proizvođača Toptica (DL 100) koji se može stabilizirati na određeni određeni atomski prijelaz koristeći saturacijsku apsorpciju u parama rubidija na sobnoj temperaturi (SAS). Detaljni opisi ECDL lasera i saturacijske apsorpcije se mogu pronaći u [24,26].



Slika 5.5: Shema eksperimentalnog postava.

Pri izlasku iz ECDL-a laserska zraka prolazi kroz optički izolator (OI) koji sprječava povratak mogućih refleksija iz postava natrag u laser zakrećući polarizaciju za  $45^\circ$ . Pri povratku je zraka zakrenuta za još  $45^\circ$  i blokirana na polarizatoru. Dio zrake se odvaja djeliteljem zrake (BS) za saturacijsku apsorpciju dok ostatak ide na akusto-optički modulator (AOM) koji se može koristiti kao vrlo brzi prekidač svjetlosti. U njemu piezoelektrični transduktor stvara valove gustoće u kristalu na kojima se vrši difrakcija laserske zrake. Postav je namješten na prvi red difrakcije, te u slučaju da se ugasi napon na AOM-u intenzitet prvog reda veoma brzo pada na nulu, a time i intenzitet koji ulazi u sustav. Nakon toga laserska zraka dolazi do zrcala (M) i prolazi kroz polarizator (POL) i  $\lambda/2$  pločicu pomoću kojih se polarizacija zrake namješta na polarizaciju svjetlovoda (optičkog vlakna) za maksimalno vezanje, odnosno transmisiju kroz optičko vlakno. Geometrija za najbolje vezanje na svjetlovod se postiže pomoću zrcala i fiber couplera (FC) koji ima dva stupnja slobode za podešavanje. Zraka prolazi kroz jednomodni svjetlovod te izlazi na drugom kraju u transverzalnom  $TEM_{00}$  modu (Gaussova zraka).

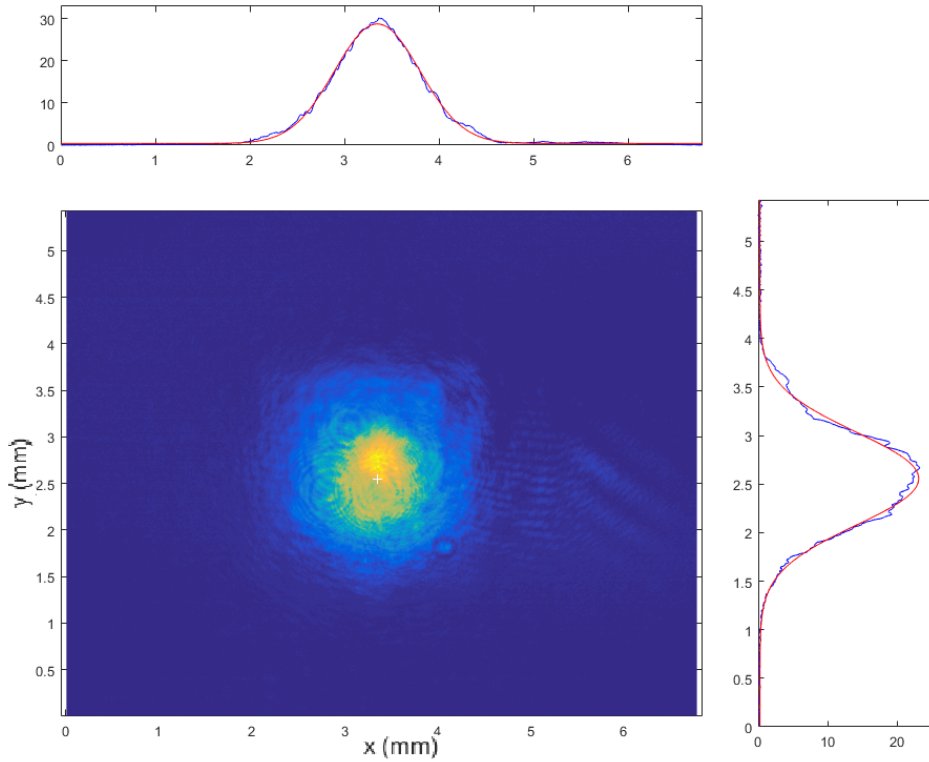
Prije ulaska u rezonator zraka se reflektira na dva zrcala (M1 i M2) i prolazi kroz leću ( $f=200$  mm) između njih. Zrcala se koriste kako bi se nagib i položaj zrake prilagodio rezonatoru, a žarišna duljina i položaj leće su odabrani kako bi se geometrija zrake (struk i gradijent envelope) prilagodila rezonatoru za postizanje najboljeg vezanja. Nakon toga zraka ulazi u plastičnu kutiju prekrivenu akustičnom

ljenom i u rezonator. Na drugom zrcalu se nalazi piezoelektrični element (PIEZO), te iza tog zrcala na putu transmitirane zrake se nalazi kamera (CAM) ili fotodioda (PD) ovisno promatraju li se trenutno transverzalni ili longitudinalni modovi rezonatora.

Zrcala rezonatora imaju tri stupnja slobode (translaciju po horizontalnom nosaču i dvije rotacijske osi) i namještaju se zajedno sa zrcalima M1 i M2 (koja dva rotacijska stupnja slobode) i položajem leće kako bi se postiglo najbolje vezanje zrake u TEM<sub>00</sub> mod rezonatora. Dolazna laserska zraka prije ulaska u rezonator ima valnu duljinu  $\lambda = 780 \text{ nm}$  i širinu (FWHM) u  $x$  i  $y$  smjeru od  $d_x$  i  $d_y$  koje smo izračunali iz raspodjele intenziteta snimljene CCD kamerom, a mogu se vidjeti na Slici 5.6:

$$d_x = (1.064 \pm 0.008) \text{ mm} \quad (5.1)$$

$$d_y = (1.128 \pm 0.009) \text{ mm} \quad (5.2)$$



Slika 5.6: Transverzalni intenzitet zrake nakon prolaska kroz svjetlovod.

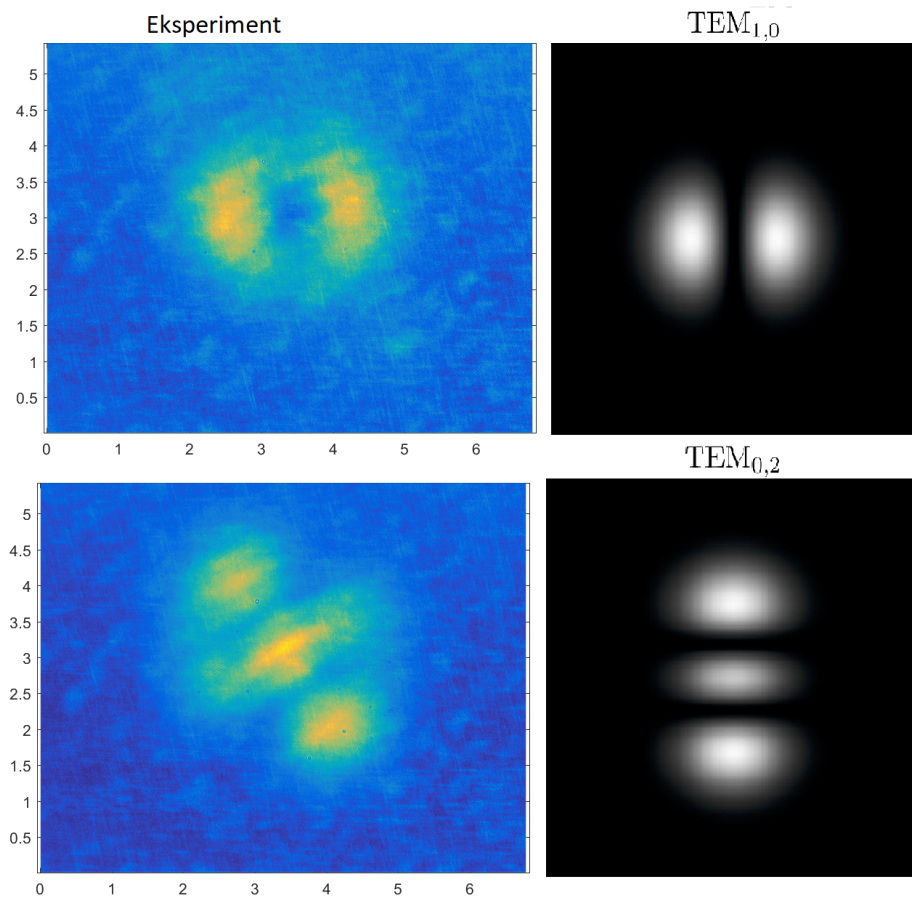
### 5.2.2 Mjerenje transverzalnih modova rezonatora

U slučaju najboljeg vezanja lasera i rezonatora očekuje se pobuda samo TEM<sub>00</sub> moda jer je to upravo mod ulazne laserske zrake.

Kako bi se mjerila pobuđenja transversalnih modova iza izlaznog zrcala na put transmissijske zrake se stavlja CCD kamera pomoću koje se snima prostorna raspodjela intenziteta svjetlosti koja izlazi iz rezonatora. Pošto je transmitirani intenzitet udio intenziteta iz rezonatora koji je zbog gubitaka na zrcalu izašao, a vjerojatnost transmisije fotona ne ovisi o modu u kojem se on nalazi, prostorna raspodjela transmitiranog intenziteta je jednaka prostornoj raspodjeli unutar rezonatora.

Promjenom parametara vezanja (položaji i nagibi zrcala rezonatora, zrcala M1, M2 i leće) rezonator se pobuđuje u različitim  $TEM_{lm}$  modovima, te kombinacijama istih.

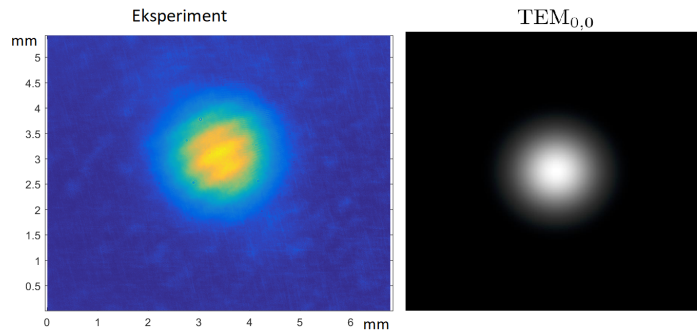
Na Slici. 5.7 možemo vidjeti raspodjelu intenziteta prilikom lošeg vezanja lasera i rezonatora. Izmjerene raspodjele odgovaraju  $TEM_{10}$  i  $TEM_{02}$  modovima.



Slika 5.7: Poprečni presjek transmitirane zrake snimljen na kameri (lijevo) u usporedbi sa raspodjelom za čisti mod (desno). Vide se  $TEM_{10}$  i  $TEM_{02}$  modovi. Posljedica toga što laser dolazi pod krivim kutem, necentralno ili je krive geometrije.

U slučaju dobrog vezanja kada su parametri dobro namješteni i zraka pada okomito na zrcalo rezonatora možemo vidjeti pobuđen  $TEM_{00}$  transversalnom mod, Slika. 5.8. Osim položajem i nagibom, vezanje možemo mijenjati i geometrijom

zrake pomoću promjenom položaja leće (lijevo-desno, gore-dolje, kutevi nagiba, udaljenost od zrcala). Sa preko 15 stupnjeva slobode na svim elementima korištenim za vezanje lasera u rezonator proces dobivanja  $TEM_{00}$  je dugotrajan i potrebno je puno strpljenja. Povećanjem finese se smanjuju rezonantne širine modova i dobivanje  $TEM_{00}$  moda postaje teže i zahtjevnije.



Slika 5.8: Laser uspješno vezan u rezonator u pretežito  $TEM_{00}$  mod.

### 5.2.3 Mjerenje longitudinalnih modova rezonatora

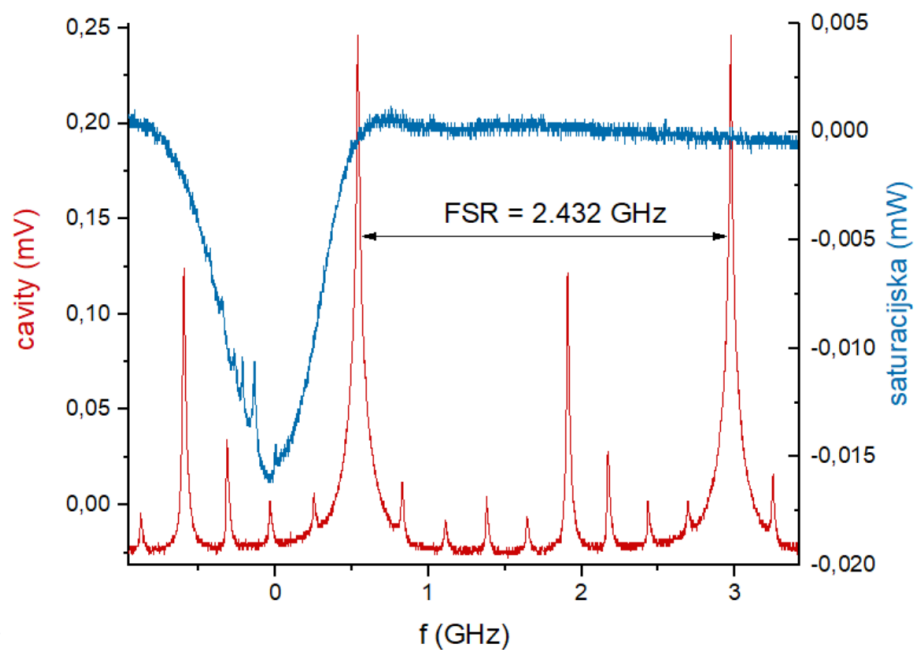
Frekvencije modova rezonatora su dane relacijom (3.28) u poglavlju 3.4. Za dobru duljinu rezonatora će postojati dvije degenerirane frekvencije, jedna za paran  $(l + m)$  i druga za neparan  $(l + m)$  pomaknuta za  $f_{FSR}/2$ .

Mjerenje longitudinalnih modova se vršilo mjerenjem transmitiranog intenziteta na fotodiodi za različite uvjete vezanja lasera i rezonatora. Korištena je fotodioda Thorlabs DET10A, a signal s fotodiode se očitavao na osciloskopu.

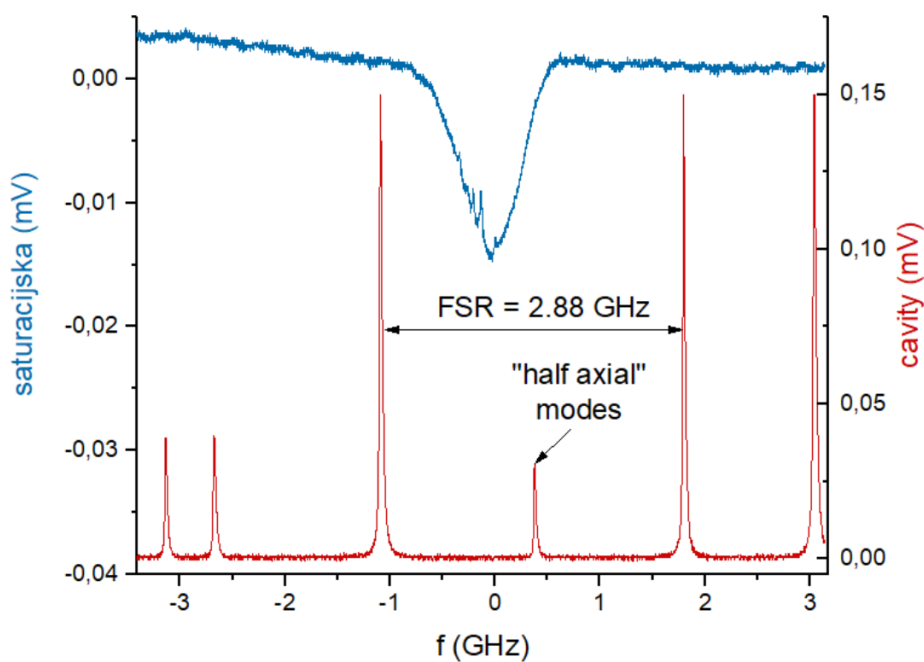
Na Slici 5.9 je prikazan spektar transmisije u slučaju lošeg vezanja lasera i rezonatora. Spektar prikazuje intenzitet transmitirane svjetlosti (crveno) u ovisnosti o frekvenciji pobudnog lasera. Plavom bojom je prikazan spektar apsorpcije lasera dobiven iz modula za saturacijsku apsorpciju, u svrhu kalibracije frekventne skale. Maksimumi intenziteta transmisije odgovaraju uvjetima rezonancije, odnosno kada pobudni laser ima istu frekvenciju kao rezonatorski modovi. Najveći maksimum odgovara modu  $TEM_{00}$  i ponavlja se periodično s frekvencijom  $f_{FSR}$ .

Pošto na Slici 5.9 postoji više od 2 maksimuma na intervalu frekvencije  $f_{FSR}$  zaključujemo da duljina rezonatora nije dobro namještena i rezonator nije u konfokalnom režimu. Kada namjestimo dobru duljinu rezonatora frekvencije su degenerirane ali još uvijek imamo više modove na frekvenciji  $f_{FSR}/2$ , Slika 5.10.





Slika 5.9: Frekventno razlučeni modovi u slučaju lošeg vezanja lasera i rezonatora. Ovakav spektar je posljedica duljine rezonatora koja ne zadovoljava uvjet konfokalnosti.

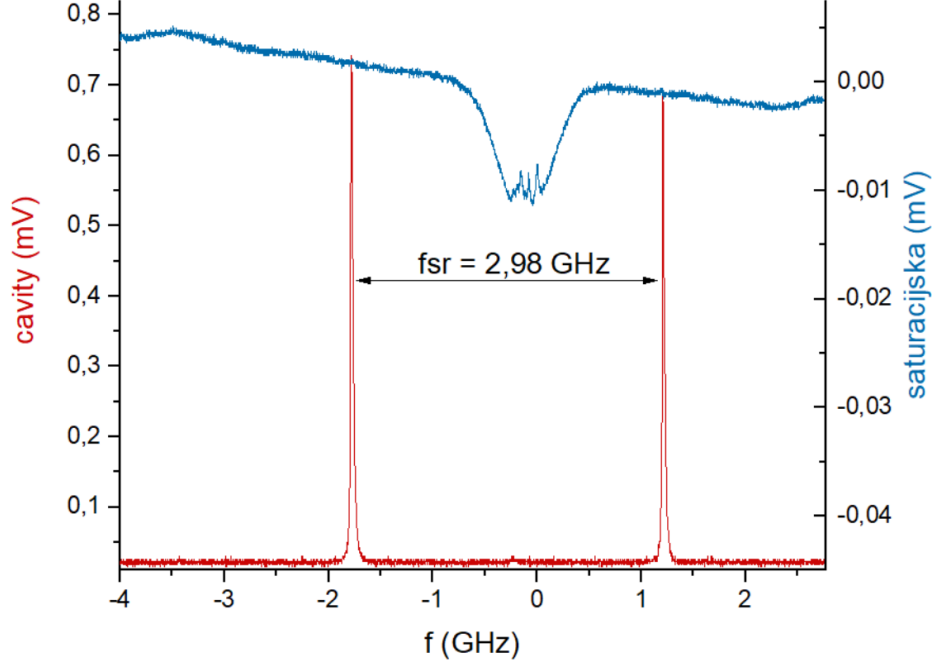


Slika 5.10: Frekventno razlučeni modovi u slučaju lošeg vezanja lasera i rezonatora. Spektar odgovara rezonatoru u konfokalnog rezimu, duljina rezonatora je dobra ali su još uvijek prisutni modovi osim željenog  $TEM_{00}$ .

Daljnijim namještanjem parametara vezanja lasera i rezonatora se postiže spektar prikazan na Slici 5.11, gdje je pobuđen samo  $TEM_{00}$  mod.

Očekivani  $f_{FSR}$  iznosi 3 GHz ( $c/2L$ ), a izmjereni razmak između rezonantnih vr-

hova je  $f_{FSR} = 2.98$  GHz. Ova razlika može biti posljedica loše kalibracije frekventne skale jer je potrebno ekstrapoliranje frekvencije sa intervala definiranog atomskim prijelazima rubidija. Ili pak loše namještena duljina rezonatora, u slučaju da frekvencije nisu degenerirane ali su dovoljno blizu da se nalaze unutar širine jedne pa ih nemožemo razlučiti.



Slika 5.11: Frekventno razlučeni modovi u slučaju dobro vezanog lasera i rezonatora. Parametri vezanja su uspješno namješteni te je  $TEM_{00}$  mod puno većeg intenziteta od ostalih.

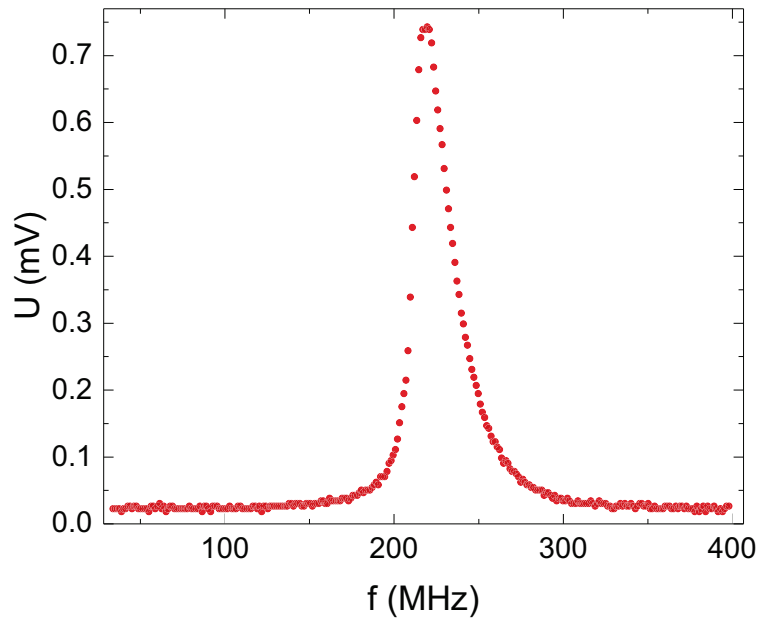
Na rezonantnom maksimumu sa Slike 5.11, gdje je postignuto najbolje vezanje lasera i rezonatora, je vršena procjena širine rezonantnog moda koju možemo vidjeti na Slici 5.12. Nije vršena funkcijska prilagodba jer lijeva polovica maksimuma je strmija od desne, odnosno proces nakupljanja fotona u rezonatoru je brži od procesa gubitka fotona. Pri sporijem skeniranju frekvencije lasera se efekti zakašnjelog nakupljanja i gubitka fotona mogu umanjiti, ali prilikom tog duljeg vremenskog intervala mjerenja drugi vanjski šumovi utječu na rezultat. Izmjerena širina rezonancije i pripadna finesa iznose:

$$\delta_{FWHM,exp} = (25.0 \pm 0.6) \text{ MHz} \quad (5.3)$$

$$\mathcal{F}_{exp} = (120 \pm 3). \quad (5.4)$$

Mnogo manje od teoretski maksimalne finese 352, određene koeficijentom reflek-

sije zrcala. Odstupanje nastaje zbog već navedenih ograničenja određivanja širine, a ostali faktori koji doprinose tome su nesavršenost zrcala, nečistoće na zrcalima, gubici fotona osim transmisije (raspršenje, apsorpcija) te odstupanja svih elemenata korištenih za vezanje lasera i rezonatora od konfokalnog režima i  $\text{TEM}_{00}$  moda.



Slika 5.12: Prilagodba rezonantnog maksimuma za najbolje vezanje  $\text{TEM}_{00}$  moda.

### 5.3 Stabilizacija optičkog rezonatora

Rezonantna frekvencija moda ovisi o duljini rezonatora, te se promjenom duljine zbog vanjskih utjecaja kao što su promjena temperature i mehaničke vibracije mijenja i rezonantna frekvencija moda. Ta promjena uzrokuje šum u intenzitetu transmittiranog spektra, stoga je za korištenje rezonatora u eksperimentu s hladnim atomima potrebno izvršiti stabilizaciju.

Unatoč mjerama koje smo prilikom izrade rezonatora poduzeli da bi se smanjili/eliminirali vanjski utjecaji na duljinu rezonatora šum na intenzitetu transmisije je još bio značajan te smo pristupili stabilizaciji rezonatora. Upotrebljena je jedna od najčešće korištenih metoda stabilizacije koja se naziva Pound-Drever-Hall (PDH) metoda [22].



### 5.3.1 PDH tehnika stabilizacije

Promatra se refleksija svjetlosne zrake na ulaznom zrcalu rezonatora.. Električno polje reflektirane zrake  $E_r$  ima direktno reflektiranu komponentu od prvog zrcala, i niz komponenti koje dolaze iz rezonatora nakon svakog obilaska između dva zrcala. Neka je  $r$  koeficijent refleksije zrcala,  $f_L = \omega/2\pi$  frekvencija lasera i  $t = \sqrt{1 - r^2}$  koeficijent transmisije zrcala, onda se električno polje reflektirane zrake može izraziti kao:

$$E_r = E_0(r e^{i(\omega t + \pi)} + \sum_{n=1}^{\infty} t r^{2n-1} t e^{i(\omega t - 2n\omega L/c)}). \quad (5.5)$$

$$E_r = E_0 e^{i\omega t} \frac{r(e^{\frac{-i\omega}{f_{FSR}}} - 1)}{1 - r^2 e^{\frac{-i\omega}{f_{FSR}}}}. \quad (5.6)$$

Usljed toga će koeficijent refleksije  $R$  iznositi.

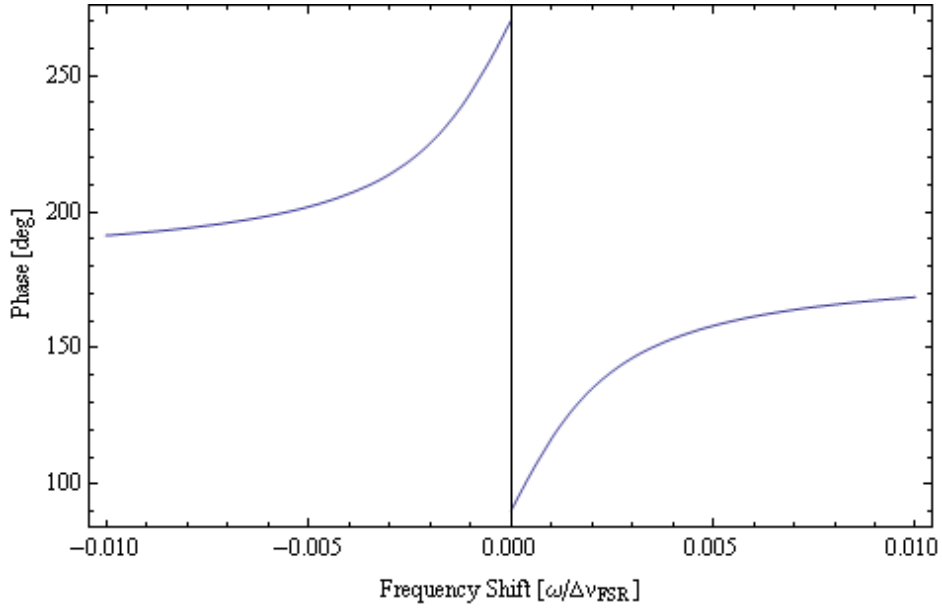
$$R(\omega) = \frac{r(e^{\frac{-i\omega}{f_{FSR}}} - 1)}{1 - r^2 e^{\frac{-i\omega}{f_{FSR}}}}. \quad (5.7)$$

Realni dio koeficijenta refleksije je simetričan oko  $\omega = 0$  i kao takav neće biti dobar signal za stabilizaciju zrake jer bi se za svaku promjenu frekvencije (prema manjim ili većim vrijednostima) dobio signal jednakog predznaka pa se ne bi znalo u kojem smjeru treba ispravljati frekvenciju. No faza, odnosno imaginarni dio koeficijenta refleksije će biti linearan oko  $\omega = 2\pi q f_{FSR}$  i time pogodan za ispravljanje frekvencije lasera, odnosno njeno vraćanje u rezonanciju sa rezonatorom, Slika 5.13.

Signal prikazan na gornjoj slici može se postići faznom modulacijom laserske zrake. Elektro-optički modulator (EOM) se koristi kako bi se modulirala faza svjetlosnog vala koje prolazi kroz njega. To se postiže istim principom rada kao što funkcioniraju valne pločice, pomoću kristala koji brzo radi promjene u indeksu loma. Ako se prije rezonatora postavi EOM, te se modulira faza svjetlosti, električno polje koje ulazi u rezonator biti će oblika:

$$E_{inc} = E_0 e^{i(\omega t + \beta \sin(\Omega t))}. \quad (5.8)$$

Za male perturbacije  $\beta$  možemo raspisati izraz pomoću Besselovih funkcija



Slika 5.13: Faza koeficijenta refleksije u ovisnosti frekvencijskom pomaku od maksimuma. Preuzeto iz [22].

$$\begin{aligned}
 E_{inc} &\approx E_0(J_0(\beta) + 2iJ_1 \sin(\Omega t))e^{i\omega t} \\
 &= E_0(J_0(\beta)e^{i\omega t} + J_1(\beta)e^{i(\omega+\Omega)t} - J_1(\beta)e^{i(\omega-\Omega)t}).
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Vidimo kako se električno polje ulazne zrake sastoji od tri komponente različitih amplituda i frekvencija. Komponente amplituda proporcionalnih s  $J_1(\beta)$  nazivaju se eng. sidebandovi, i vidimo kako su odmaknuti za modulacijsku frekvenciju  $\Omega$  od primarne frekvencije  $\omega$ . Ovako modulirana zraka dolazi do rezonatora pri čemu se svaka pojedina frekventna komponenta reflektira u skladu s izrazom (5.7).

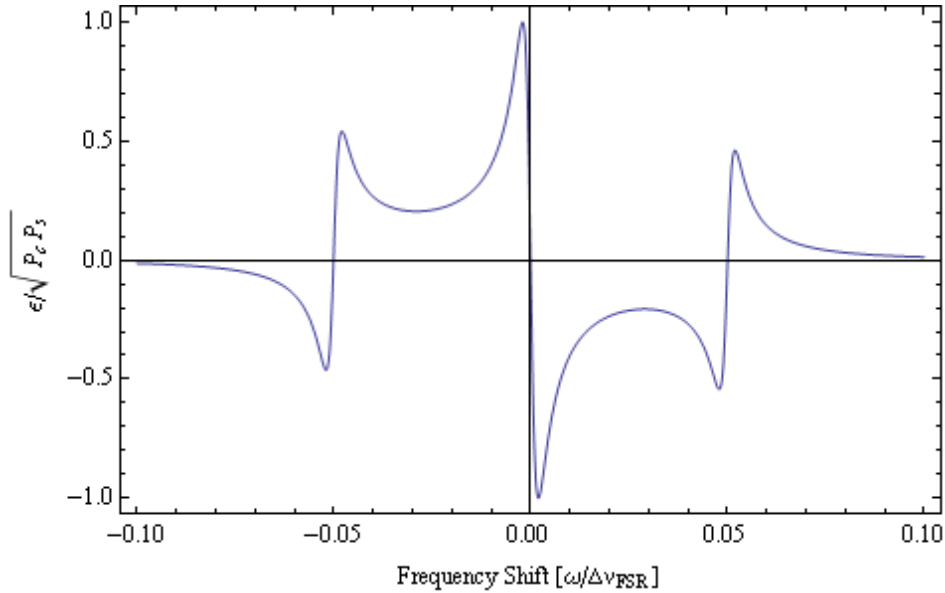
$$E_{inc} = E_0(R(\omega)J_0(\beta)e^{i\omega t} + R(\omega + \Omega)J_1(\beta)e^{i(\omega+\Omega)t} - R(\omega - \Omega)J_1(\beta)e^{i(\omega-\Omega)t}) \tag{5.10}$$

Naravno nismo u mogućnosti izravno mjeriti karakteristike električnog polja reflektirane zrake, moramo se zadovoljiti sa intenzitetom  $P_{refl} \propto |E_{refl}|^2$ . Neka su  $P_0$  i  $P_1$  snage koje odgovaraju električnim poljima osnovnog vala frekvencije  $\Omega$ , tj. sidebandovima frekvencija  $\omega \pm \Omega$ . Ukupna snaga reflektirane zrake može se zapisati kao:

$$\begin{aligned}
P_{refl} = & P_0 |R(\omega)|^2 + P_1 (|R(\omega + \Omega)|^2 + |R(\omega - \Omega)|^2) \\
& + 2\sqrt{P_0 P_1} \operatorname{Re} \left[ R(\omega) R^*(\omega + \Omega) - R^*(\omega) R(\omega - \Omega) \right] \cos(\Omega t) \\
& + 2\sqrt{P_0 P_1} \operatorname{Im} \left[ R(\omega) R^*(\omega + \Omega) - R^*(\omega) R(\omega - \Omega) \right] \sin(\Omega t) \\
& + \mathcal{O}(2\Omega)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Snaga reflektirane zrake ima DC komponentu, dvije komponente koje osciliraju s frekvencijom modulacije  $\Omega$ , te viši redovi koji proizlaze iz unakrsnih sideband članova. Znamo da će imaginarne komponente  $R(\omega)$  činiti dobar korekcijski (error) signal za stabilizaciju frekvencije pa možemo član koji sadrži  $\sin(\Omega t)$  izdvojiti iz intenziteta tako da pomnožimo  $P_{refl}$  sa modulacijskim signalom  $\sin(\Omega t)$  za što se u eksperimentu upotrebljava elektronički modul zvan mikser. Izolirajući DC komponentnu iz pomnoženog signala dobivamo željeni PDH error signal Slika 5.14.

$$\epsilon = 2\sqrt{P_0 P_1} \operatorname{Im} \left[ R(\omega) R^*(\omega + \Omega) - R^*(\omega) R(\omega - \Omega) \right] \tag{5.12}$$



Slika 5.14: Ovisnost PDH error signala za  $\Omega = 0.05 f_{FSR}$ , vidimo očekivani nesimetričan signal oko  $\omega = q f_{FSR}$ . Nagib je vrlo strm i linearan, odlične karakteristike za upravljanje servom koji će povratnim signalom stabilizirati rezonator. Preuzeto iz [22].

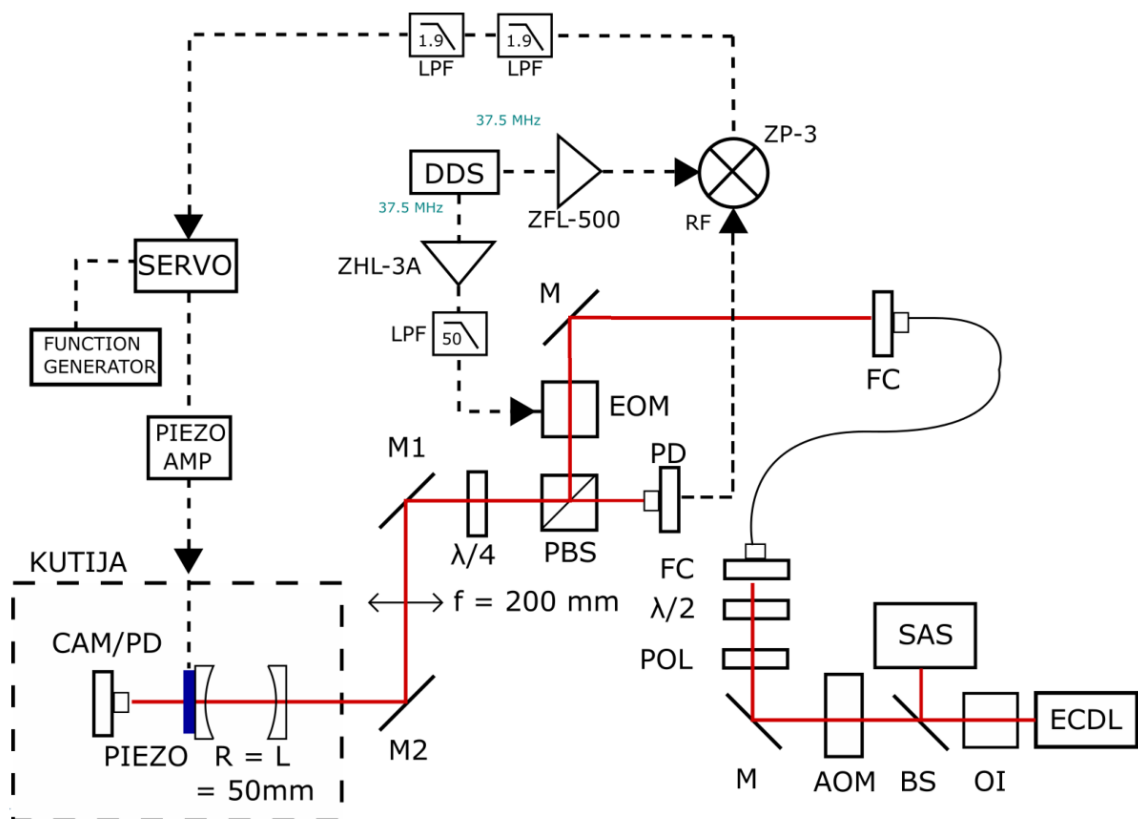
### 5.3.2 Eksperimentalni postav za dobivanje PDH signala

Realizaciju postava za frekventnu stabilizaciju rezonatora korištenu u ovom diplomskom radu vidimo na Slici. 5.15.

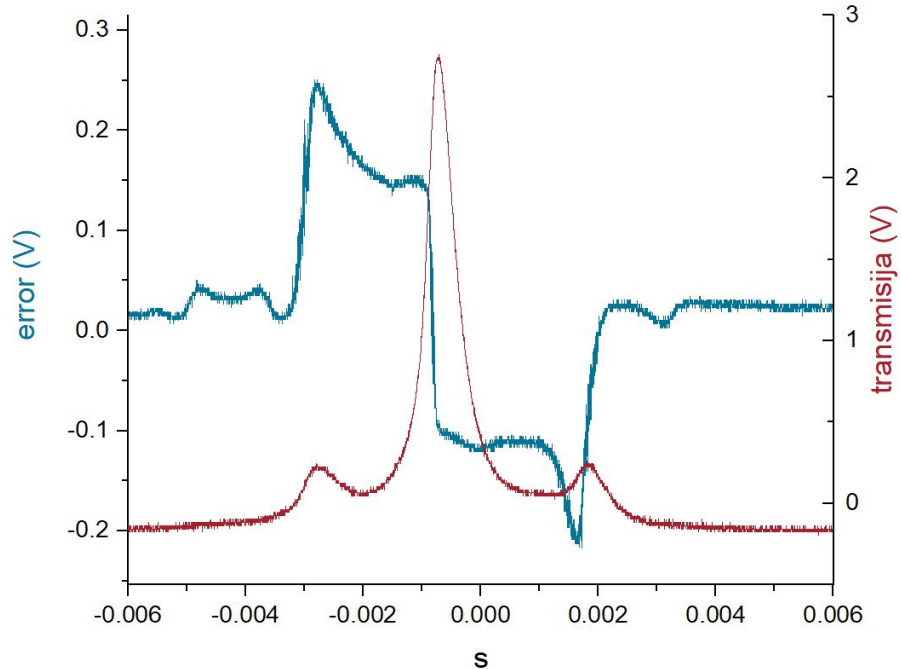
Uz komponente navedene u poglavlju 5.2.1 vidimo elektroničke i optičke elemente potrebne za PDH stabilizaciju rezonatora. Između svjetlovoda i rezonatora je postavljen elektro-optički modulator Qubig EO-38L3-NIR (EOM) za potrebnu modulaciju signala i polariziracijski djelitelj signala (PBS) koji reflektira dolaznu polarizaciju a njoj okomitu propušta. PBS se koristi uz  $\lambda/4$  pločicu da se reflektirani signal zakrene za  $90^\circ$  i propusti do fotodiode Thorlabs PDA10A-EC (PD) koja mjeri intenzitet reflektiranog signala. Direct Digital Synthesizer Novatech DDS9m (DDS) se koristi za generiranje dva signala frekvencije  $f = 37.5$  MHz i podešavanje faze između njih. Ti signali će koristiti za PDH stabilizaciju, i pojačavaju se na prikladnim pojačalima (ZHL-3A i ZFL-500) te šalju preko niskopropusnog filtera (LPF  $f = 50$  MHz, Mini Circuits BLP-50+) na EOM i množitelj signala Mini Circuits ZP-3 (RF).

Sa miksera se signal šalje preko dva niskopropusna filtera (LPF  $f = 1.9$  MHz, Mini Circuits BLP-1.9+) na servo kontroler New Focus LB1005 (SERVO). Servo kontroler određuje napon potreban za korekciju frekvencije i šalje ga na pojačalo Piezomechanik SVR 150/3 (PIEZO AMP) na koje je spojen piezoelektrični element koji mijenja duljinu rezonatora. Function generator marke Voltcraft (FUNCTION GENERATOR) se koristi za dodavanje napona na piezoelektrični element koji ne funkcionira na 0 V nego na intervalu napona 50-80 V.

PDH stabilizaciju je uspješno izvedena te je dobiven korekcijski signal prikazan na Slici 5.16.



Slika 5.15: Shema PDH postava za stabilizaciju rezonatora.



Slika 5.16: PDH korekcijski (error) signal i intenzitet transmitirane zrake. Pokraj glavnog maksimuma vidimo dva sidebanda, posljedica frekventne modulacije za Pound-Drever-Hall metodu.

## 6 Zaključak

U ovom diplomskom radu proučavana je fizika optičkog rezonatora unutar kojeg su smješteni atomi, s ciljem razumijevanja procesa hlađenja i samoorganizacije. Opisani su teorijski modeli hlađenja i zarobljavanja atoma u optičkom rezonatoru pobuđenom laserom jedne frekvencije, kao i laserom koji emitira u nekoliko frekventnih modova. Napravljene su teorijske simulacije dinamike atoma unutar optičkog rezonatora koji je pobuđen s osam frekventnih modova. Izračunate su putanje atoma i vremenska ovisnost impulsa za skupinu atoma homogene početne gustoće i određene početne temperature, odnosno određene početne širine raspodjele impulsa. Za snage pobudnog lasera koje su veće od kritične snage, opažen je efekt samoorganizacije. Atomi se iz početne homogene prostorne distribucije, nakon određenog vremena interakcije s laserom, nakupljaju u periodičnu distribuciju, perioda valne duljine svjetlosti. Razlog tome je dipolna sila koja zarobljava atome u minimume optičkog potencijala. Samoorganizacija je brža za veće snage lasera.

S druge strane, hlađenje atoma (tj. smanjenje prosječne kinetičke energije) se može opaziti i za snage pobudnog lasera koje su ispod kritične snage, međutim hlađenje je u tom slučaju jako sporo i neefikasno. Za optimalnu snagu lasera, opaženo je smanjenje širine distribucije impulsa za faktor 2.3, iz čega se može zaključiti da se početna temperatura smanjila otprilike za faktor 5, potkrijepljeno činjenicom da se prosječna kinetička energija smanjila za faktor 7.

U eksperimentalnom dijelu rada opisana je izrada konfokalnog rezonatora koji će se u narednom eksperimentu postaviti u MOT komoru. Izrađeni konfokalni rezonator je karakteriziran mjerenjem transverzalnih i longitudinalnih modova. U eksperiment je uvedena PDH tehnika stabilizacije rezonatora, za što je napravljen odgovarajući eksperimentalni postav, te izmjeren očekivani korekcijski signal.

## Bibliography

- [1] Službena stranica Nobelove nagrade - Metode hlađenja i zarobljavanja atoma  
<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1997/summary/>
- [2] Službena stranica Nobelove nagrade - Bose Einsteinov kondenzat <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2001/summary/>
- [3] Službena stranica Nobelove nagrade - Proučavanje tranzicijskih stanja kemijskih reakcija femtosekundnom spektroskopijom <https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1999/summary/>
- [4] Službena stranica Nobelove nagrade - Laserske tehnike spektroskopije, uključujući tehnike optičkog frekventnog češlja <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2005/summary/>
- [5] Službena stranica Nobelove nagrade - Optičke pincete i njihova primjena u biologiji, te metode generiranja ultrakratkih optičkih pulseva visokog intenziteta <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2018/summary/>
- [6] Hachenblaikner, G. Cavity induced atom cooling and trapping. Diplomski rad. Innsbruck : Naturwissenschaftlichen Fakultät, 1997.
- [7] Ritsch, H.; Domokos, P.; Brennecke, F.; Esslinger, T. Cold atoms in cavity-generated dynamical optical potentials // arXiv:1210.0013v2 [cond-mat.quant-gas] 17 Oct 2012
- [8] Domokos, P.; Horak, P.; Ritsch, H. Semiclassical theory of cavity-assisted atom cooling // Journal of Physics B: At. Mol. Opt. Phys. 34 (2001) 187–198
- [9] Zeppenfeld, M. et al. Optoelectrical cooling of polar molecules (2009), Physical Review A 80 (4), 041401+.
- [10] Vukics, A., J. Janszky, and P. Domokos (2005), Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics 38 (10), 1453.
- [11] L. Davidovic et al., Phys. Rev. A 53, 1295 (1996).
- [12] K.M. Gheri and H. Ritsch, Phys. Rev. A 56, 3187 (1997).

- [13] Gangl, M., and H. Ritsch (2001), Physical Review A 64 (6), 063414+. <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.64.063414> 5. 7. 2019.
- [14] Domokos, P., T. Salzburger, and H. Ritsch (2002), Physical Review A 66 (4), 043406+.
- [15] Collett, M. J.; Gardiner; C. W. , Physical Review. A 30, 1386 (1984)
- [16] Walls, D. F.; Milburn, G. J. Quantum Optics, Springer (1994)
- [17] Šantić, N. Synthetic Lorentz force for neutral cold atoms. doktorski rad. University of Zagreb: Faculty of Science 2018.
- [18] Optical cavity [https://en.wikipedia.org/wiki/Optical\\_cavity](https://en.wikipedia.org/wiki/Optical_cavity)
- [19] Steck, Daniel A. Classical and Modern Optics, <http://steck.us/teaching> (revision 1.7.4, 6 July 2017)
- [20] Schütz, S.; Morigi, G. Physical review letters 113, 203002 (2014).
- [21] Neidenzu, W.; Grieb, T.; Ritsch, H. Europhysics Letters 96, 43001 (2011)
- [22] Nickerson, M. A review of Pound-Drever-Hall laser frequency locking. <http://jila1.nickersonm.com/papers/PDH%20Locking%20Review.pdf> 2. 7. 2019.
- [23] Altus, D. [altus@ifs.hr](mailto:altus@ifs.hr)
- [24] Cipriš, A. Hlađenje atoma optičkim frekventnim češljem. Diplomski rad. Sveučilište u Zagrebu, PMF, Fizički odsjek, lipanj 2017. [http://cold.ifs.hr/wp-content/uploads/2014/06/Hla%C4%91enje-atoma-opti%C4%8Dkim-frekventnim-%C4%8De%C5%A1ljem\\_diplomski\\_compressed.pdf](http://cold.ifs.hr/wp-content/uploads/2014/06/Hla%C4%91enje-atoma-opti%C4%8Dkim-frekventnim-%C4%8De%C5%A1ljem_diplomski_compressed.pdf)
- [25] Chu, S. Science 253, 861-866, 1991.
- [26] Buhin, D. Optomehanika hladnih atoma uzrokovana femtosekundnim laserskim zračenjem. Diplomski rad. Sveučilište u Zagrebu, PMF, Fizički odjek, srpanj 2017. [http://cold.ifs.hr/wp-content/uploads/2014/06/compressed\\_diplomski\\_dbuhin-1.pdf](http://cold.ifs.hr/wp-content/uploads/2014/06/compressed_diplomski_dbuhin-1.pdf)